



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



Это цифровая копия книги, хранящейся для потомков на библиотечных полках, прежде чем ее отсканировали сотрудники компании Google в рамках проекта, цель которого - сделать книги со всего мира доступными через Интернет.

Прошло достаточно много времени для того, чтобы срок действия авторских прав на эту книгу истек, и она перешла в свободный доступ. Книга переходит в свободный доступ, если на нее не были поданы авторские права или срок действия авторских прав истек. Переход книги в свободный доступ в разных странах осуществляется по-разному. Книги, перешедшие в свободный доступ, это наш ключ к прошлому, к богатствам истории и культуры, а также к знаниям, которые часто трудно найти.

В этом файле сохранятся все пометки, примечания и другие записи, существующие в оригинальном издании, как напоминание о том долгом пути, который книга прошла от издателя до библиотеки и в конечном итоге до Вас.

Правила использования

Компания Google гордится тем, что сотрудничает с библиотеками, чтобы перевести книги, перешедшие в свободный доступ, в цифровой формат и сделать их широкодоступными. Книги, перешедшие в свободный доступ, принадлежат обществу, а мы лишь хранители этого достояния. Тем не менее, эти книги достаточно дорого стоят, поэтому, чтобы и в дальнейшем предоставлять этот ресурс, мы предприняли некоторые действия, предотвращающие коммерческое использование книг, в том числе установив технические ограничения на автоматические записи.

Мы также просим Вас о следующем.

- Не используйте файлы в коммерческих целях.
Мы разработали программу Поиск книг Google для всех пользователей, поэтому используйте эти файлы только в личных, некоммерческих целях.
- Не отправляйте автоматические записи.
Не отправляйте в систему Google автоматические записи любого вида. Если Вы занимаетесь изучением систем машинного перевода, оптического распознавания символов или других областей, где доступ к большому количеству текста может оказаться полезным, свяжитесь с нами. Для этих целей мы рекомендуем использовать материалы, перешедшие в свободный доступ.
- Не удаляйте атрибуты Google.
В каждом файле есть "водяной знак" Google. Он позволяет пользователям узнать об этом проекте и помогает им найти дополнительные материалы при помощи программы Поиск книг Google. Не удаляйте его.
- Делайте это законно.
Независимо от того, что Вы используете, не забудьте проверить законность своих действий, за которые Вы несете полную ответственность. Не думайте, что если книга перешла в свободный доступ в США, то ее на этом основании могут использовать читатели из других стран. Условия для перехода книги в свободный доступ в разных странах различны, поэтому нет единых правил, позволяющих определить, можно ли в определенном случае использовать определенную книгу. Не думайте, что если книга появилась в Поиске книг Google, то ее можно использовать как угодно и где угодно. Наказание за нарушение авторских прав может быть очень серьезным.

О программе Поиск книг Google

Миссия Google состоит в том, чтобы организовать мировую информацию и сделать ее всесторонне доступной и полезной. Программа Поиск книг Google помогает пользователям найти книги со всего мира, а авторам и издателям - новых читателей. Полнотекстовый поиск по этой книге можно выполнить на странице <http://books.google.com/>

QA246
C48
1895

I.A.Chistiakov
THE BERNULLI NUMBERS
1895

Russian

Gift of

Joseph J. Smortchevsky



STANFORD UNIV

сформулировать - в терминах системы

$$B_1 = -\frac{1}{2} \quad (-B_1) \quad B_{12} = -\frac{3617}{510}$$

$$(B_2) \quad B_2 = \frac{1}{6} \quad B_{12} = \frac{93867}{798}$$

$$(-B_3) \quad B_3 = -\frac{1}{30} \quad (-B_{10}) \quad B_{20} = \frac{174.611}{330}$$

$$(B_4) \quad B_4 = \frac{1}{42} \quad B_{12} = \frac{854.573}{138}$$

$$(-B_5) \quad B_5 = -\frac{1}{30}$$

$$(B_6) \quad B_6 = \frac{5}{66}$$

$$(B_7) \quad B_7 = -\frac{691}{2730}$$

$$(B_8) \quad B_8 = \frac{7}{6}$$

$$\int_0^{\infty} \varphi(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right) e^{-2x} dx =$$

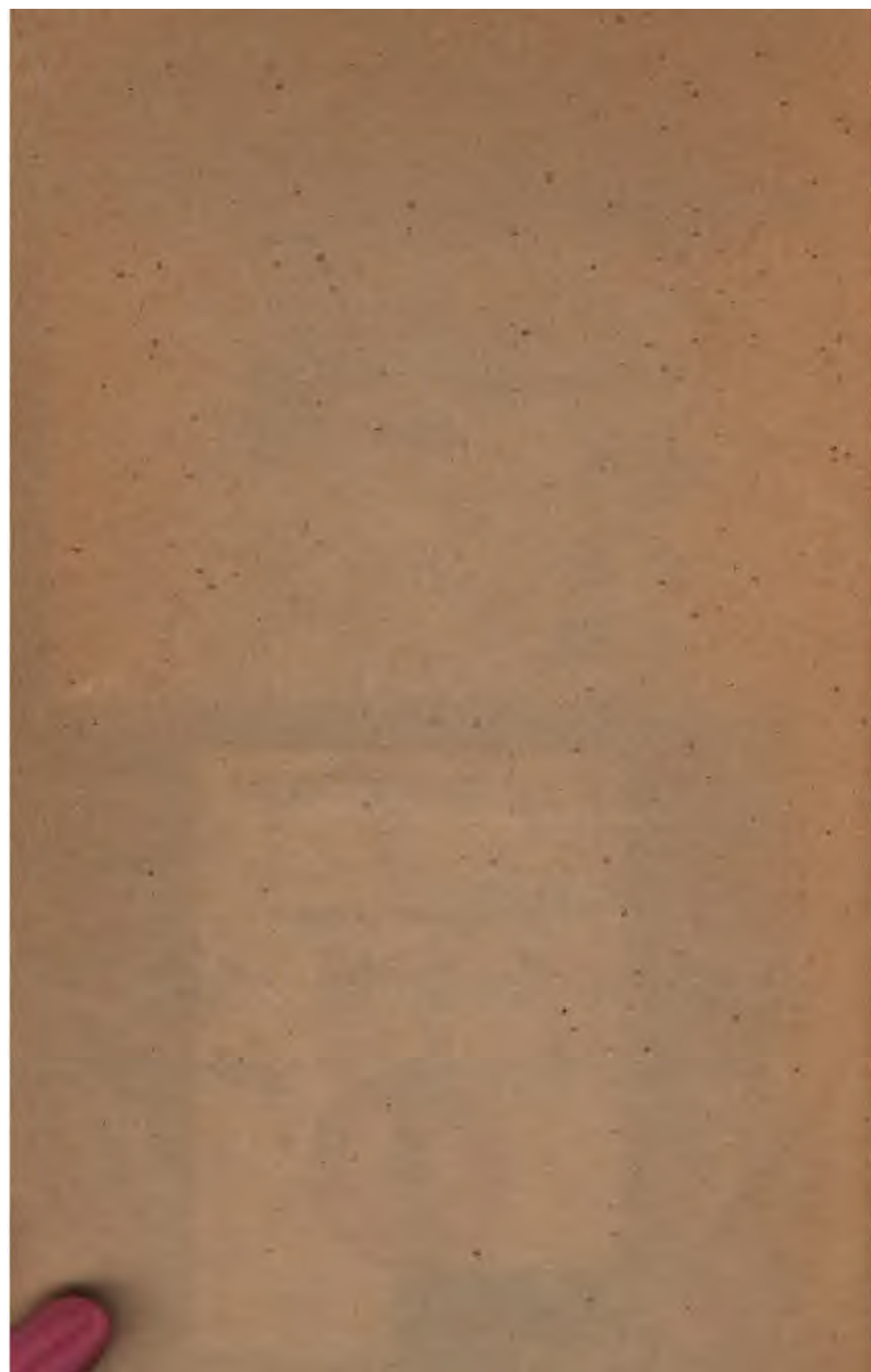
Сопро. ТП

$$2\pi n \varphi(x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots x}{\sqrt{2\pi} x^{x+\frac{1}{2}}}$$

Сопро. ТП

$$\frac{1}{x} \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right) = \frac{B_1}{2!} + \frac{B_3}{4!} x^2 + \frac{B_5}{6!} x^4 + \cdots + \frac{B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-2} + \frac{B_{2n+2}}{(2n+2)!} x^{2n}$$

$$\int_0^{\infty} \varphi(x) = \frac{B_1}{1 \cdot 2} \frac{1}{x} + \frac{B_3}{3 \cdot 4} \frac{1}{x^3} + \frac{B_5}{5 \cdot 6} \frac{1}{x^5} + \cdots + \frac{B_{2n}}{(2n-1) \cdot 2n} \frac{1}{x^{2n+1}} + \frac{B_{2n+2}}{(2n+1) \cdot 2n} \frac{1}{x^{2n+1}}$$



Ресурсы

БЕРНУЛЛЕВЫ ЧИСЛА.

числа 13 - с/р 31

И. И. Чистякова.

Государь Иванъ Ивановичъ Чистяковъ

Сочиненіе, удостоенное Физико-Математическимъ Факультетомъ Императорскаго
Московскаго Университета золотой медали.

МОСКВА.

Университетская типографія, Страстной бульваръ.

1895.

From the books of
Joseph J. Smortchovsky
Vancouver, B.C., Canada, 1986

Изъ „Ученыхъ Записокъ“ Императорскаго Московскаго Университета
Отдѣлъ Физико-Математическій.

О Г Л А В Л Е Н И Е.

	<i>Стр.</i>
ВВЕДЕНИЕ	1
Историческій очеркъ развитія ученія о Бернулліевыхъ числахъ	4
ГЛАВА I. Происхожденіе Бернулліевыхъ чиселъ; ихъ основныя свойства и выраженія.	
§ 1. Бернулліевы числа и Бернулліевы функціи.....	11
§ 2. Соотношенія Моавра.....	14
§ 3. Формула суммированія Эйлера.....	15
§ 4. О функціи $F(x) = \frac{x}{e^x - 1}$	19
§ 5. Эйлеровы соотношенія между Бернулліевыми числами.....	21
§ 6. Независимое выраженіе Бернулліева числа	24
§ 7. Выраженіе Бернулліева числа при помощи безконечнаго произведенія.....	29
§ 8. Таблицы Эйлера.....	30
ГЛАВА II. Развитиe ученія Эйлера о Бернулліевыхъ числахъ.	
§ 9. Формула Лапласа.....	31
§ 10. Соотношенія Мейера.....	35
§ 11. Соотношенія, получаемыя изъ разложенія въ ряды тригонометрическихъ функцій.....	38
§ 12. Формулы Штерна.....	39
§ 13. Формула А. Genocchi.....	45
§ 14. Формулы Кронекера.....	48
§ 15. Представленіе Бернулліева числа въ формѣ опредѣленнаго интеграла.....	57
ГЛАВА III. Исслѣдованіе Бернулліевыхъ чиселъ въ связи съ Бернулліевыми функціями.	
§ 16. Свойства Бернулліевыхъ функцій.....	61
§ 17. Вычисленіе $\varphi_{2n} - \left(\frac{1}{2}\right)$	66
§ 18. Выводъ формулы Эйлера съ дополнительнымъ членомъ.....	70
§ 19. Формула Дарбу.....	74
§ 20. Формула Буля.....	76

	Стр.
21. Соотношенія между Б. числами, получающимися изъ разсмотрѣнія Б. функций.....	78
22. О разложеніи функций по функциямъ Я. Бернулли.....	79
23. Соотношенія высшихъ порядковъ между Б. числами.....	81
24. Независимое выраженіе для Бернуллиева числа.....	—
 ГЛАВА IV. Выращеніе Бернуллиевыхъ чиселъ при помощи чиселъ Моргана и чиселъ, имъ аналогичныхъ.	
§ 25. Формула В. Г. Ишпенецкаго.....	83
§ 26. Распространеніе предыдущаго метода.....	86
§ 27. Приложенія формулы Гершеля.....	87
§ 28. Нѣкоторые преобразованія полученныхъ формулъ.....	89
§ 29. Выращенія Бернуллиевыхъ чиселъ въ числахъ вида $\Delta^m(1^n)$	91
§ 30. Связь чиселъ Бернулли съ гармоническимъ рядомъ.....	96
 ГЛАВА V. Изслѣдованіе Бернуллиевыхъ чиселъ при помощи метода символическаго обозначенія.	
§ 31. Изслѣдованіе Бернуллиевыхъ функций при помощи символическаго обозначенія.....	103
§ 32. Выводъ соотношеній между Бернуллиевыми числами.....	105
§ 33. Представленіе Бернуллиевыхъ чиселъ въ формѣ детерминантовъ..	106
§ 34. Общее символическое тождество для вывода зависимостей между числами Я. Бернулли.....	108
§ 35. Распространеніе основного тождества на случай функций со многими переменными.....	109
§ 36. Обобщеніе основного тождества и слѣдствія.....	110
§ 37. Разложеніе въ ряды нѣкоторыхъ тригонометрическихъ функций и слѣдствія.....	113
 ГЛАВА VI. Приложеніе къ изслѣдованію Бернуллиевыхъ чиселъ методовъ теоріи чиселъ.	
§ 38. Теорема Штаудта.....	116
§ 39. Формула Эрмита.....	120
§ 40. Таблица значеній цѣлыхъ чиселъ А.....	123
§ 41. Теоремы Genocchi.....	—
§ 42. Теоремы Коши.....	125
§ 43. Теорема и таблица Adams'a.....	127
§ 44. Теорема Г. Э. Вороного.....	128
§ 45. Слѣдствія теоремы.....	132
§ 46. Формула профессора Н. В. Бугаева.....	134
§ 47. Замѣчаніе о числахъ Эйлера. Заключение.....	139

ВВЕДЕНІЕ.

Бернуллиевы числа, названныя такъ по имени открывшаго ихъ знаменитаго математика Якова Бернулли (1654—1705), играютъ весьма важную роль въ различныхъ отдѣлахъ математическаго анализа. Такъ, они входятъ въ качествѣ коэффициентовъ въ общую формулу суммированія Эйлера и въ формулу Стирлинга; появляются также при разложеніи въ ряды весьма многихъ функцій; ими точно выражается значеніе нѣкоторыхъ опредѣленныхъ интеграловъ и проч. Весьма естественно, поэтому, что, по мѣрѣ того, какъ выяснялось важное значеніе этихъ чиселъ въ анализѣ, интересъ къ ихъ изученію все болѣе и болѣе возрасталъ, такъ что знаменитѣйшіе математики, какъ Моавръ, Эйлеръ, Лапласъ и другіе, охотно посвящали свои труды этому предмету. Эти изслѣдованія показали, что числа Я. Бернулли обладают многими замѣчательнѣйшими числовыми свойствами. Такъ, выяснилось, что они допускаютъ множество различныхъ соотношеній между собою, изъ которыхъ ихъ можно послѣдовательно вычислить; они могутъ быть разнымъ образомъ представляемы при помощи безконечныхъ произведеній и безконечныхъ рядовъ, чиселъ Моргана, детерминантовъ опредѣленнаго состава и проч.; въ то же время они имѣютъ связь съ различными числовыми функціями и въ своемъ образованіи подчинены замѣчательнымъ числовымъ законамъ.

Такимъ образомъ, Бернуллиевы числа имѣютъ одинаково важное значеніе и въ Анализѣ, и въ Теоріи чиселъ, и потому изученіемъ ихъ занимались лица, посвящавшія себя какъ тому, такъ и другому изъ этихъ отдѣловъ математики. Вслѣдствіе этого, литература Бернуллиевыхъ чиселъ, возникшая, сравнительно, не особенно давно, въ настоящее время весьма обширна. Однако, нѣтъ еще ни одного сочиненія, специально посвященнаго изложенію ученія о Бернуллиевыхъ числахъ во всей его полнотѣ: существующія изслѣдованія по этому предмету имѣютъ обыкновенно своей цѣлью раскрытіе какого-либо одного, опредѣленнаго свойства чиселъ Бернулли, или же примѣненіе къ изученію ихъ какого-либо новаго метода. Весьма часто также свойства Бернуллиевыхъ чиселъ указываются мимоходомъ, при изслѣдованіи какого нибудь вопроса Анализа.

Предлагаемое сочиненіе имѣетъ своею цѣлью по возможности полное и систематическое изложеніе ученія о Бернуллиевыхъ числахъ. Источниками для него послужили слѣдующія сочиненія и статьи, помѣщенныя въ математическихъ журналахъ:

Euler. Institutiones Calculi Differentialis. P. II.

Lacroix. Cours d'Analyse. t. III. 1819.

Schlömilch, Compendium der höheren Analysis. t. II.

Herschel. Collection of Examples of the Applications of the Calculus of Finite Differences.

Staudt. De numeris Bernullianis. Commentatio I et commentatio II. Erlangen. 1845.

Bertrand. Traité de Calcul Différentiel et Intégral.

Boole. A Treatise on the Calculus of Finite Differences.

Tannery. Introduction à la théorie des fonctions d'une variable. 1886.

Н. В. Бугаевъ. Ученіе о числовыхъ производныхъ. 1870. Свойства одного числового интеграла по дѣлителямъ. 1888.

Е. Lucas. Théorie des nombres. 1892.

Meyer. Über Bernoullischen Zahlen. Grunert's Archiv, XXV.

Staudt. Beweis eines Lehrsatzes die Bernoullischen Zahlen betreffend. Journal de Crelle, t. 21.

Raabe. Zurückführung einiger Summen und bestimmten Integrale auf die J. Bernoullische Function. J. de Cr. t. 42.

Bauer. Von einigen Summen - und Differenzenformeln und den Bernoullischen Zahlen. J. de Cr. t. 58.

Hermite. Lettre à Borchardt sur la fonction de Jacob Bernoulli. J. de Cr. t. 79.

Extrait d'une lettre à Borchardt. J. de Cr. t. 81.

Sur la formule de Maclaurin. J. de Cr. t. 84.

A. Genocchi. Intorno all'espressione generale de' numeri Bernoulliani. Ann. di B. Tortolini. I, 3.

Stern. Über eine Eigenschaft der Bernoullischen Zahlen. Zur Theorie der B. Zahlen (J. de Cr. t. 84, 88, 92),

Beiträge zur Theorie der B. und Eulerschen Zahlen. Abh. der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. t. 23, 26.

Adams. Table of the values of the first sixty two numbers of Bernoulli. J. de Cr. t. 85.

L. Kronecker. Über die B. Zahlen. J. de Cr. t. 94.

Sur quelques fonctions symétriques et sur les nombres de Bernoulli. J. de Liouville II. s. 1.

В. Г. Имшенецкий. О функциях Я. Бернулли. Записки Импер. Казанскаго Университета. 1870.

Blissard. Theory of generic equations. Quarterly J. IV.

Darboux. Sur les développements en série des fonctions d'une variable. J. de Liouville. III s. t. II. 295.

Horner. On the properties of the $\Delta^m O^n$ Class of numbers and of others analogous to them. Quarterly Journal, IV.

Сонинъ. О Бернуллевыхъ полиномахъ и ихъ приложеніяхъ. Варшавскія Универ. Изв. 1888.

E. Cesaro. Sur une fonction arithmétique. Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris, 1888, CVI.

Г. Θ. Вороной. О числах Бернулли. Сообщения Харьковского Матем. Общества. 2-я серия, т. II, № 3.

A. Berger. Recherches sur les nombres et fonctions de Bernoulli. Acta Mathematica XIV, 3.

Исторический очерк развития учения о Бернуллиевых числах.

Сочинение, въ которомъ Я. Бернулли далъ 5 первыхъ изъ названныхъ въ послѣдствіи по его имени чиселъ, есть его знаменитый трактатъ по теоріи вѣроятностей: «*Ars conjectandi*». Подробно излагая ученіе о вѣроятностяхъ, Я. Бернулли даетъ въ немъ также цѣлый рядъ математическихъ предложеній, которыя необходимы при рѣшеніи разныхъ частныхъ задачъ изъ теоріи вѣроятностей. Къ числу подобныхъ предложеній относится вопросъ о вычисленіи суммъ одинаковыхъ степеней натуральныхъ чиселъ, т. е. суммъ вида:

$$S_p(n) = S_p = 1^p + 2^p + \dots + n^p.$$

Давая p послѣдовательно значенія 1, 2, 3... Я. Бернулли показалъ, что общимъ выраженіемъ такой суммы будетъ:

$$S_p = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \frac{p}{1.2} A n^{p-1} + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3.4} B n^{p-3} + \\ + \frac{p(p-1)\dots(p-4)}{1.2\dots 6} C n^{p-5} + \dots$$

гдѣ коэффициенты $A, B, C \dots$ постоянны и не зависятъ отъ n и отъ p . Эти коэффициенты и суть Бернуллиевы числа. Самъ Я. Бернулли вычислилъ суммы S_p до S_{10} , такъ что получилъ 5 изъ этихъ чиселъ. Сочиненіе: «*Ars Conjectandi*» появилось въ свѣтъ уже послѣ смерти его автора, именно въ 1713 году; такимъ образомъ,

къ этому году мы можемъ отнести и начало ученія о Бернуллиевыхъ числахъ.

Самое названіе: «числа Якова Бернулли» было введено въ науку Моавромъ (1667—1754), который въ своемъ сочиненіи: «*Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis*» далъ общую формулу, позволяющую вычислить какое-либо Б. число, если извѣстны значенія предшествующихъ ему чиселъ. Но особенно это названіе утвердилось въ наукѣ со времени знаменитаго Эйлера (1707—1783). Эйлеръ, много и охотно занимавшійся изслѣдованіемъ этихъ чиселъ, показалъ, что они имѣютъ весьма важное значеніе для анализа; такъ, онъ обнаружилъ, что они входятъ, какъ коэффициенты, въ общую формулу суммированія рядовъ, по отношенію къ которой формула Я. Бернулли оказывается лишь частнымъ случаемъ; кромѣ того, они появляются въ качествѣ коэффициентовъ и въ разложеніяхъ въ ряды многихъ важныхъ тригонометрическихъ и показательныхъ функцій. Указавши рядъ новыхъ соотношеній, которымъ удовлетворяютъ числа Бернулли и изъ которыхъ они могутъ быть вычислены послѣдовательно, Эйлеръ далъ и независимое выраженіе для любого Бернуллиева числа въ отдѣльности; это выраженіе замѣчательно тѣмъ, что содержитъ трансцендентное число π и сумму безконечнаго ряда. Всѣ эти изслѣдованія сгруппированы Эйлеромъ въ V-й главѣ его «Дифференціального Исчисленія», гдѣ онъ даетъ и таблицу значеній первыхъ 15 Бернуллиевыхъ чиселъ.

Труды Эйлера возбудили общій интересъ къ Б. числамъ, и изученіемъ ихъ стали заниматься очень многіе. При этомъ болѣе всего ученыхъ интересовалъ вопросъ о нахожденіи раціональнаго выраженія Б. числа, въ функціи его указателя, т. е. мѣста, занимаемаго имъ въ рядѣ чиселъ Бернулли. Первую формулу подобнаго рода предложилъ Лапласъ въ 1777 г. Выраженіе, данное имъ, весьма замѣчательно по своему составу, но при вычисленіи Б. числа съ большимъ указателемъ становится неудобнымъ вслѣд-

ствие сложности формулы. Другое независимое выражение для Б. числа было дано итальянским математиком А. Генносchi в 1852 г. (Ann. di B. Tortolini, I, 3). Оно замѣчательно тѣмъ, что даетъ Б. число въ функціи его указателя n и нѣкотораго произвольнаго числа m , подчиненнаго лишь одному условію $m \geq n$. Еще болѣе общій характеръ носятъ формулы, предложенныя въ 1856 году Л. Кронекеромъ, которыя устанавливаютъ зависимость между Б. числами и нѣкоторыми симметрическими функціями корней алгебраическихъ уравненій. Нѣкоторыми учеными было замѣчено, что Б. числа могутъ быть выражаемы при помощи опредѣленныхъ интеграловъ; такихъ выраженій было получено нѣсколько и первое изъ нихъ предложилъ математикъ Рана въ 1820 г.

Другая группа исследователей Б. чиселъ, слѣдовавшихъ за Эйлеромъ, продолжала изучать тѣ соотношенія, которыя существуютъ между этими числами. Рядомъ исследованийъ Мейера, Зейделя и въ особенности Штерна было выведено подобныхъ формулъ множество. При этомъ оказалось, что кромѣ соотношеній, въ которыя входятъ Б. числа отъ перваго и до какого-нибудь опредѣленнаго числа B_m , могутъ быть установлены и такія, которыя содержатъ лишь нѣкоторые изъ чиселъ, предшествующихъ B_m . Соотношенія послѣдняго рода представляютъ значительныя удобства для вычисленія чиселъ Бернулли. Долгое время, однако, не было общихъ методовъ для вывода подобныхъ соотношеній. Вопросъ этотъ былъ разрѣшенъ окончательно уже въ новѣйшее время, преимущественно алтайскими математиками, применившими къ исследованію Б. чиселъ методы символическаго исчисленія. Таковы труды Blissard'a, Hogneg'a и др., помѣщенные, главнымъ образомъ въ журналѣ «Quarterly Journal of Math.», такой же характеръ носятъ и исследования Lucas, сгруппированныя въ его книгѣ «Théorie des nombres». Всѣ формулы, полученныя такимъ символическимъ путемъ, отличаются замѣчательнымъ изяществомъ.

Одновременно съ исследованиемъ Б. чиселъ изучалась и самая

формула суммированія Эйлера, въ которой эти числа являются коэффициентами. Извѣстно, что она была дана Эйлеромъ въ формѣ безконечнаго ряда, поэтому различные ученые настойчиво стремились узнать выраженіе остатка, которымъ нужно дополнить этотъ рядъ, если остановимъ его на какомъ-либо членѣ. По этому вопросу возникла обширная литература, и скоро выяснилось, что рѣшеніе его требуетъ знанія свойствъ такъ называемыхъ Бернуллиевыхъ функцій, т. е. функцій вида:

$$S_p = 1^p + 2^p + \dots + x^p.$$

Вслѣдствіе этого, по почину Раабе, который ввелъ и самое названіе: «функція Я. Бернулли», эти функціи были подвергнуты подробному изученію. Вслѣдствіе простоты ихъ состава, главнѣйшія свойства ихъ скоро были изучены, въ особенности при помощи методовъ исчисленія конечныхъ разностей, и дополнительный членъ къ формулѣ Эйлера былъ полученъ въ 1839 г. Остроградскимъ, а затѣмъ Мальмстеномъ и другими учеными. Знаніе свойствъ Бернуллиевыхъ функцій повліяло и на изученіе Б. чиселъ: ихъ стали изучать, примѣняя къ Б. функціямъ, въ разложеніяхъ которыхъ они являются коэффициентами, методы исчисленія конечныхъ разностей. Слѣдствіемъ этого было открытіе цѣлаго ряда выраженій Б. чиселъ въ числахъ Моргана. Нѣсколько подобныхъ выраженій было предложено покойнымъ академикомъ В. Г. Имшенецкимъ, въ статьѣ: «О функціяхъ Я. Бернулли» (Зап. Имп. Казанскаго Унив. 1870 г.). Кромѣ того, подобныя же формулы были получены въ большомъ количествѣ Гершелемъ и другими англійскими математиками, примѣнившими известную теорему Гершеля къ тѣмъ функціямъ отъ e^x , которыя разлагаются въ ряды съ Б. коэффициентами. Каталанъ показалъ, что кромѣ чиселъ Моргана, Б. числа могутъ быть выражаемы и чрезъ числа вида $\Delta^m(1^n)$; одна изъ такихъ формулъ и была имъ дана въ книгѣ «*Mélanges mathématiques*».

Изслѣдованіе чиселъ Я. Бернулли при помощи однихъ лишь аналитическихъ приѣмовъ не могло, однако, привести къ полному и ясному знанію ихъ числового состава; для подробнаго раскрытія ихъ числовыхъ свойствъ необходимо было примѣнять къ изученію ихъ еще спеціальныя методы Теоріи Чиселъ. Первая попытка въ этомъ направленіи была сдѣлана извѣстнымъ геометромъ Штаудтомъ и привела къ блестящимъ результатамъ. Пользуясь методами Теоріи Чиселъ, Штаудтъ показалъ, что числа Я. Бернулли имѣютъ простой и въ то же время весьма замѣчательный числовой составъ, именно n -ое Б. число, (означаемое у насъ чрезъ B_{2n}), представляетъ собою разность нѣкотораго цѣлаго числа A_{2n} и суммы дробей, изъ которыхъ каждая имѣетъ числителемъ 1, а знаменателемъ простое число, на 1 превышающее одного изъ дѣлителей числа $2n$, т. е.

$$B_{2n} = A_{2n} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{\lambda} \right)$$

Эта замѣчательная теорема была изложена Штаудтомъ въ первый разъ въ 21 т. журнала Крелля и носить его имя (хотя иногда называется еще теоремой Штаудта и Клаузена, такъ какъ независимо отъ Штаудта ее доказалъ еще Клаузенъ). Нѣсколько позже Штаудтъ предложилъ новое, болѣе краткое и строгое доказательство той же теоремы, а также развилъ цѣлый рядъ ея слѣдствій въ двухъ небольшихъ брошюрахъ: «De numeris Bernullianis commentatio I» и «Commentatio II», изданныхъ въ Эрлангенѣ въ 1845 г. Здѣсь, кромѣ свойствъ знаменателей чиселъ Я. Бернулли, онъ указалъ и на нѣкоторыя свойства ихъ числителей. Однако, обѣ эти брошюры, вѣроятно вслѣдствіе слишкомъ ограниченаго числа ихъ экземпляровъ, остались почти неизвѣстными ученому міру, и потому основная теорема Штаудта доказывается почти всегда такъ, какъ онъ доказалъ ее въ первый разъ въ 21 томѣ журнала Крелля. Наоборотъ, неоднократно различными уче-

ными предлагались доказательства этой теоремы, совпадающія въ сущности съ тѣмъ вторымъ доказательствомъ ея, которое Штаудтъ далъ въ брошюрѣ «De numeris Bernullianis. Commentatio I». Таковы доказательства, предложенныя Schläfli (Quarterly j., VI); Е. Лусасъ и др. Что касается до теоремы, выражающей свойства числителей Б. чиселъ и доказанной Штаудтомъ во 2-й изъ его брошюръ, то она оставалась неизвѣстной для ученыхъ до тѣхъ поръ, пока Adams, вычислявшій значенія Б. чиселъ, эмпирически вновь не открылъ одинъ ея частный случай. Замѣченныя свойства числителей чиселъ Я. Бернулли Adams указалъ безъ доказательства въ 85 т. журнала Крелля вмѣстѣ съ вычисленной и проверенной имъ таблицей 62 первыхъ Б. чиселъ. Стремясь доказать теорему Adams'а, Г. О. Вороной доказалъ въ 1890 г. («Сообщенія Харьк. Матем. Общ. II с., № 3) вновь вторую изъ теоремъ Штаудта. Въ предлагаемомъ сочиненіи приведено то доказательство этой теоремы, которое дано Г. О. Воронымъ, такъ какъ оно проще доказательства, предложеннаго самимъ Штаудтомъ. Что касается первой и основной теоремы Штаудта, то мы приводимъ то доказательство ея, которое было дано имъ самимъ въ брошюрѣ: «Commentatio I». (Съ обѣими этими брошюрами автору предлагаемаго сочиненія удалось познакомиться въ библіотекѣ Императорской Академіи Наукъ). Теоремы Штаудта послужили основаніемъ для цѣлаго ряда изслѣдованій числовыхъ свойствъ Б. чиселъ. Такъ, Эрмитъ въ 1876 г. и, по его примѣру, Штернъ, предложили цѣлый рядъ теоремъ, которыя даютъ возможность вычислять цѣлыя числа A , входящія въ составъ Бернуллиевыхъ чиселъ. Вообще, въ настоящее время примѣненіе спеціально числовыхъ методовъ къ изученію чиселъ Я. Бернулли является господствующимъ.

Послѣднее изъ извѣстныхъ независимыхъ выраженій Б. числа было предложено Н. В. Бугаевымъ въ 1888 г. и представляетъ примѣръ приложенія въ ученіи о Бернуллиевыхъ числахъ принциповъ ученія о числовыхъ производныхъ, въ новѣйшее время

выдвинутого въ науку и подробно разработаннаго въ многочисленныхъ сочиненіяхъ Н. В. Бугаевымъ. Формула профессора Бугаева выражаетъ Б. число при помощи нѣкотораго замѣчательнаго безконечнаго произведенія. Первоначально она была дана въ сочиненіи: «Свойства одного числового интеграла по дѣлителямъ», а затѣмъ помѣщена также съ краткимъ выводомъ въ «Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris», CVI, 1888. Послѣ этого математикъ Е. Сезаго предложилъ другой ея выводъ, стоящій въ связи съ нѣкоторыми его собственными изслѣдованіями въ области числовыхъ функцій.

Предлагаемое сочиненіе было уже окончено, когда появился новый трудъ, посвященный изложенію ученія о числахъ Я. Бернулли—Кенигсбергскаго профессора L. Saalschütz'a: «Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen» 1893. Авторъ его пользовался, однако, почти исключительно нѣмецкими источниками и не принималъ во вниманіе многихъ цѣнныхъ трудовъ о Б. числахъ, написанныхъ на другихъ языкахъ, такъ что сочиненіе его далеко не исчерпываетъ обширнаго и интереснаго матеріала, представляемаго современной литературой о Бернуллиевыхъ числахъ.

ГЛАВА I.

Происхожденіе Бернуллиевыхъ чиселъ, ихъ основныя свойства и выраженія.

§ 1. Бернуллиевы числа и Бернуллиевы функции. Какъ было упомянуто въ историческомъ очеркѣ, Я. Бернулли открылъ числа, названныя впоследствии по его имени, изслѣдуя, для рѣшенія нѣкоторыхъ вопросовъ изъ теоріи вѣроятностей, сумму одинаковыхъ степеней натуральныхъ чиселъ:

$$S_n = 1^n + 2^n + 3^n + \dots + (x-1)^n + x^n.$$

Именно, давши этой суммѣ выраженіе въ функциі x , расположенной по нисходящимъ степенямъ этого переменнаго, Я. Бернулли замѣтилъ, что въ коэффициенты при различныхъ степеняхъ x всегда входятъ одни и тѣ же числовые множители, не зависящіе отъ n ; они и были названы впоследствии Бернуллиевыми числами. Формула, найденная Я. Бернулли, можетъ быть, слѣдовательно, получена чрезъ вычисленіе интеграла въ конечныхъ разностяхъ $\sum x^n$ при разности $\Delta x = 1$ и въ предѣлахъ отъ 0 до x , ибо:

$$S_n = \sum x^n + x^n.$$

Но этотъ интегралъ легко получается при любой разности $\Delta x = h$, дѣйствительно:

$$\begin{aligned} \Delta x^{n+1} &= (x+h)^{n+1} - x^{n+1} = \frac{(n+1)}{1} x^n h + \\ &+ \frac{(n+1)n}{1.2} x^{n-1} h^2 + \dots + h^{n+1} x^0. \end{aligned}$$

Беря интеграль по конечнымъ разностямъ отъ обѣихъ частей этого равенства, имѣемъ:

$$x^{n+1} = \frac{n+1}{1} h \sum x^n + \frac{(n+1)n}{1.2} h^2 \sum x^{n-1} + \dots + h^{n+1} \sum x^0.$$

Такимъ образомъ $\sum x^n$ можно выразить чрезъ x^{n+1} и $\sum x^{n-1}$, $\sum x^{n-2}$, $\sum x^{n-3}$ и т. д.; точно также $\sum x^{n-1}$ выражается чрезъ x^n и $\sum x^{n-2}$, $\sum x^{n-3}$... , такъ что можно положить:

$$\sum x^n = Ax^{n+1} + Bx^n + Cx^{n-1} + Dx^{n-2} + \dots \quad (A)$$

Беря первую разность отъ каждой части равенства (A), имѣемъ:

$$\begin{aligned} x^n = & A \frac{n+1}{1} x^{n-1} h + A \frac{(n+1)n}{1.2} x^{n-2} h^2 + A \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} x^{n-3} h^3 + \dots \\ & + B \frac{n}{1} x^{n-1} h + B \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2} h^2 + \dots \\ & + C \frac{(n-1)}{1} x^{n-2} h + \dots \end{aligned}$$

Отсюда находимъ:

$$A \frac{(n+1)}{1} h = 1;$$

$$A \frac{(n+1)n}{1.2} h^2 + B \frac{n}{1} h = 0;$$

$$A \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} h^3 + B \frac{n(n-1)}{1.2} h^2 + C \frac{(n-1)}{1} h = 0$$

и, слѣдовательно:

$$A = \frac{1}{(n+1)h}$$

$$B = - \frac{A(n+1)h}{1.2} = - \frac{1}{2}$$

$$C = - \frac{A(n+1)n}{1.2.3} h^2 - B \frac{nh}{1.2} = \frac{nh}{1.2} \left(- \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{nh}{1.2}$$

$$D = -\frac{A(n+1)n(n-1)}{1.2.3.4}h^3 - B\frac{n(n-1)}{1.2.3}h^2 - C\frac{(n-1)h}{1.2} =$$

$$= \frac{n(n-1)}{1.2.3}h^2 \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = 0.$$

$$E = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}h^3 \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = -\frac{1}{30} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}h^3$$

.....

Разсматривая эти коэффициенты, видимъ, что начиная съ C , они, будучи составлены вполне опредѣленнымъ образомъ изъ n и h , имѣютъ еще нѣкоторыхъ числовыхъ множителей, законъ образованія которыхъ не ясенъ съ перваго взгляда. Этимъ-то числовымъ множителямъ и дано названіе коэффициентовъ или чиселъ Я. Бернулли, такъ что 1-е изъ нихъ, входящее въ C , есть $\frac{1}{6}$, 2-е равно 0, 3-е $= -\frac{1}{30}$ и пр. Съ давнихъ поръ этимъ числамъ стали давать особое обозначеніе, которое, однако, еще не вполне установилось. Весьма много занимавшійся ими Эйлеръ означалъ ихъ буквами нѣмецкой азбуки: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D} \dots$; позже, въ честь Я. Бернулли, ихъ стали означать буквой B съ индексами, причемъ, какъ показали изслѣдованія новѣйшаго времени, удобнѣе всего та система индексовъ, при которой B_0 соответствуетъ самому первому коэффициенту въ разложеніи $\sum x^n$, т. е. $B_0=1$, далѣе $B_1=-\frac{1}{2}$, $B_2=\frac{1}{6}$, $B_3=0$, $B_4=-\frac{1}{30}$ и проч. Послѣ замѣны коэффициентовъ $A, B, C \dots$ ихъ выраженіями чрезъ B числа, равенство (A) приметъ видъ:

$$\sum x^n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)h} + B_1 x^n + B_2 \frac{nh}{1.2} x^{n-1} + B_3 \frac{n(n-1)}{1.2.3} h^2 x^{n-2} + \dots K (A')$$

гдѣ K — періодическая функція, Взявъ $h=1$ и предѣлами интеграла 0 и x , найдемъ:

$$\left[\begin{aligned} \sum x^n &= 1^n + 2^n + 3^n + \dots + (x-1)^n = \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + B_1 x^n + B_2 \frac{n}{1.2} x^{n-1} + B_3 \frac{n(n-1)}{1.2.3} x^{n-2} + \\ &\quad + B_4 \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4} x^{n-3} + \dots \end{aligned} \right] \quad (1)$$

и, значитъ,

$$\begin{aligned} S_n &= 1^n + 2^n + 2^n + \dots + (x-1)^n + x^n = \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1} - B_1 x^n + B_2 \frac{n}{1.2} x^{n-1} + B_3 \frac{n(n-1)}{1.2.3} x^{n-2} + \\ &\quad + B_4 \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4} x^{n-3} + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

— формула Я. Бернулли.

При изслѣдованіи Бернуллиевыхъ чиселъ гораздо чаще пользуются формулой (1), чѣмъ (2). Выраженіе, стоящее во 2-й части равенства (1), нередко рассматривается при любомъ значеніи переменнаго x и тогда носитъ названіе функции Я. Бернулли; отличительнымъ свойствомъ этой функции будетъ, слѣдовательно, то, что для цѣлыхъ значеній переменнаго x она даетъ сумму одинаковыхъ степеней натуральныхъ чиселъ отъ 1 до $(x-1)$ включительно. Означается Бернуллиева функция обыкновенно чрезъ $\varphi(x)$ съ соответствующимъ индексомъ, такъ что:

$$\varphi_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + B_1 x^n + B_2 \frac{n}{1.2} x^{n-1} + B_3 \frac{n(n-1)}{1.2.3} x^{n-2} + \dots$$

Суммы вида S_n были вычислены Я. Бернулли до $n=10$ включительно, такъ что имъ были найдены Б. числа до B_{10} . Мы покажемъ нѣсколько далѣе, что всѣ Б. числа съ нечетными индексами, кромѣ $B_1 = -\frac{1}{2}$, суть нули, числа же, найденныя Я. Бернулли и не обращающіяся въ 0 суть:

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42},$$

$$B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_{10} = \frac{5}{66}.$$

§ 2. Соотношенія Моавра.

Я. Бернулли не далъ еще общихъ формулъ, пользуясь которыми можно было-бы вычислять названныя по его имени числа; впервые формула подобнаго рода была указана Моавромъ въ сочиненіи «Miscellanea Analytica». Способъ его заключается въ томъ, что

мы беремъ въ ур. (A') предыд. § предѣлами интеграла 0 и h , получимъ:

$$0 = \frac{h^{n+1}}{(n+1)h} + B_1 h^n + B_2 \frac{nh^n}{1.2} + B_3 \frac{n(n-1)}{1.2.3} h^n + \dots$$

или

$$0 = \frac{1}{n+1} + B_1 + B_2 \frac{n}{1.2} + B_3 \frac{n(n-1)}{1.2.3} + B_4 \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4} + \dots \quad (1)$$

Полагая здѣсь $n=2, 3, 4 \dots$ можно послѣдовательно найти Б. числа изъ соотношеній:

$$0 = \frac{1}{3} + B_1 + B_2; \quad B_2 = -\frac{1}{6}$$

$$0 = \frac{1}{4} + B_1 + B_2 \frac{3}{1.2} + B_3; \quad B_3 = 0$$

$$0 = \frac{1}{5} + B_1 + B_2 \frac{4}{1.2} + B_3; \quad B_4 = -\frac{1}{30}$$

$$0 = \frac{1}{6} + B_1 + B_2 \frac{5}{1.2} + B_3 \frac{5.4.3}{1.2.3.4} + B_4; \quad B_5 = 0.$$

и т. д. Соотношенія Моавра показываютъ, что Б. числа суть рациональныя.

§ 3. Формула суммированія Эйлера.

см. стр. 70

Первоначальнымъ своимъ развитіемъ ученіе о Б. числахъ всецѣло обязано Эйлеру, который указалъ на важное значеніе ихъ въ Анализѣ, получилъ рядъ ихъ замѣчательныхъ свойствъ и выраженій и вычислилъ ихъ до B_{30} включительно.

Прежде всего, Эйлеръ показалъ, что Бернуллиева формула есть лишь частный случай открытой имъ общей формулы суммированія рядовъ, такъ что Бернуллиевы коэффициенты должны войти кромѣ ряда для S_n во множество другихъ разложеній. Эта формула Эйлера получается весьма просто изъ формулы Тейлора. Пусть имѣемъ $f(x)$ и перемѣнному дается приращеніе h ; тогда:

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) = hf'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \frac{h^3}{1.2.3} f'''(x) + \dots$$

Взявъ интегралъ по конечнымъ разностямъ отъ обѣихъ частей этого равенства, найдемъ:

$$f(x)=h \sum f'(x)+\frac{h^2}{1.2}\sum f''(x)+\frac{h^3}{1.2.3}\sum f'''(x)+ \\ +\frac{h^4}{1.2.3.4}\sum f^{IV}(x)+\dots$$

Отсюда:

$$\int f(x)dx=h \sum f(x)+\frac{h^2}{1.2}\sum f'(x)+\frac{h^3}{1.2.3}\sum f''(x)+\dots$$

и

$$\sum f(x)=\frac{1}{h}\int f(x)dx-\frac{h}{1.2}\sum f'(x)-\frac{h^2}{1.2.3}\sum f''(x)-\dots \quad (I)$$

Чтобы исключить отсюда $\sum f'(x)$, $\sum f''(x)$ и пр., беремъ послѣдовательно производныя отъ обѣихъ частей этого равенства:

$$\sum f'(x)=\frac{1}{h}f(x)-\frac{h}{1.2}\sum f''(x)-\frac{h^2}{1.2.3}\sum f'''(x)- \\ -\frac{h^3}{1.2.3.4}\sum f^{IV}(x)-\dots$$

$$\sum f''(x)=\frac{1}{h}f'(x)-\frac{h}{1.2}\sum f'''(x)-\frac{h^2}{1.2.3}\sum f^{IV}(x)- \\ -\frac{h^3}{1.2.3.4}\sum f^V(x)-\dots$$

.....
.....

Умножая далѣе эти уравненія соотвѣтственно на A_1h , A_2h^2 , $A_3h^3\dots$, гдѣ A_1 , A_2 , $A_3\dots$ произвольные множители, и складывая ихъ съ (I), имѣемъ:

$$\sum f(x)=\frac{1}{h}\int f(x)dx-\frac{h}{1.2}\left|\sum f'(x)-\frac{h^2}{1.2.3}\left|\sum f''(x)-\frac{h^3}{1.2.3.4}\left|\sum f'''(x)-\right.\right.\right. \\ \left.\left.+A_1f(x)\right.-A_1h\left|\begin{array}{c} -\frac{A_1h^2}{1.2} \\ -A_2h^3 \end{array}\right|\begin{array}{c} -\frac{A_1h^3}{1.2.3} \\ -\frac{A_2h^3}{1.2} \end{array}\right|\begin{array}{c} -A_3h^3 \end{array}\right| \\ \left.\left.+A_2hf'(x)\right.\right. \\ \left.\left.A_3h^2f''(x)\right.\right| \\ \dots\dots\dots$$

Пусть множители A такъ выбраны, что суммы членовъ во всѣхъ вертикальныхъ столбцахъ, кромѣ 1-го, обращаются въ 0. Это, очевидно, возможно сдѣлать и притомъ только единственнымъ способомъ, ибо отсюда слѣдуютъ такія соотношенія между коэффициентами A :

$$A_1 + \frac{1}{1.2} = 0, \quad A_2 + \frac{A_1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} = 0 \text{ и т. д.,}$$

такъ что

$$A_1 = -\frac{1}{2}, \quad A_2 = \frac{1}{12}, \quad A_3 = 0 \text{ и пр.}$$

Послѣ такого выбора коэффициентовъ, формула суммированія приметъ видъ:

$$\sum f(x) = \frac{1}{h} \int f(x) dx + A_1 f(x) + A_2 h^2 f''(x) + \dots + K. \quad (\Pi)$$

Такъ какъ множители A не зависятъ отъ вида $f(x)$, то вмѣсто того, чтобы находить ихъ изъ соотношеній, можно для опредѣленія ихъ примѣнить какую-либо частную функцію, для которой интегралъ $\sum f(x)$ уже извѣстенъ. Всего удобнѣе воспользо-ваться для этой цѣли уже найденнымъ нами интеграломъ $\sum x^n$. Тогда по формулѣ (II) имѣемъ:

$$\sum x^n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)h} + A_1 x^n + A_2 n h x^{n-1} + A_3 n(n-1) h^2 x^{n-2} + \dots$$

Сравнивая это съ формулой (A') § 1 находимъ:

$$A_1 = \frac{B_1}{1}, \quad A_2 = \frac{B_2}{1.2}, \dots, A_n = \frac{B_n}{1.2 \dots n}.$$

Такимъ образомъ, коэффициенты въ формулѣ суммированія Эйлера выражаются чрезъ B . числа. Поэтому, если докажемъ, что въ формулѣ (II) коэффициенты A_n при нечетномъ n равны 0, то вмѣстѣ съ тѣмъ будетъ доказано, что Бернуллиевы числа съ нечетными индексами суть нули. Чтобы доказать первое изъ этихъ положеній, примѣнимъ ф. (II) къ $f(x) = e^x$, найдемъ:

$$\sum e^x = \frac{1}{h} e^x + A_1 e^x + A_2 h e^x + A_3 h^2 e^x + \dots$$

Но

$$\Delta e^x = e^x (e^h - 1) \text{ и } \sum e^x = \frac{e^x}{e^h - 1}$$

поэтому:

$$\frac{e^x}{e^h - 1} = \frac{1}{h} e^x + A_1 e^x + A_2 h e^x + A_3 h^2 e^x + \dots$$

или

$$\frac{h}{e^h - 1} = 1 + A_1 h + A_2 h^2 + A_3 h^3 + \dots$$

Следовательно, коэффициенты въ формулѣ Эйлера и въ разложении функции $\frac{h}{e^h - 1}$ по степенямъ h — одни и тѣ же. Легко, однако, убедиться, что въ последнее разложение не войдутъ нечетныя степени h , кромѣ первой. Для этого, замѣняя A чрезъ $-\frac{1}{2}$, представимъ эту функцію въ видѣ:

$$\frac{h}{e^h - 1} + \frac{h}{2} = 1 + A_2 h^2 + A_4 h^4 + A_6 h^6 + \dots$$

или

$$\frac{h}{2} \left(\frac{2}{e^h - 1} + 1 \right) = \frac{h}{2} \cdot \frac{e^h + 1}{e^h - 1} = 1 + A_2 h^2 + A_4 h^4 + \dots$$

Лѣвая часть этого равенства не измѣняется отъ замѣны h чрезъ $-h$, следовательно и 2-я часть его должна быть четной функцией h , а потому всѣ коэффициенты A съ нечетными индексами, начиная съ A_3 , суть нули. На этомъ основаніи и Б. числа вида B_{2k-1} , кромѣ B_1 , суть нули, и потому выраженіе Бернуллиевой функціи принимаетъ болѣе краткій видъ:

$$\varphi_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + B_1 x^n + B_2 \frac{n}{1 \cdot 2} x^{n-1} + B_4 \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^{n-3} + \dots$$

Формула же суммированія Эйлера окончательно представится въ видѣ:

$$\sum f(x) = \frac{1}{h} \int f(x) dx + B_1 f(x) + B_2 \frac{h^2}{1 \cdot 2} f'(x) + \\ + B_3 \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} f'''(x) + \dots + K \quad (III)$$

Из этой формулы можно получить видоизмѣненіе ея, весьма часто употребляемое въ Анализѣ. Имено, дифференцируемъ (III) и возьмемъ затѣмъ 1-ю разность отъ обѣихъ частей уравненія, найдемъ:

$$hf'(x) = \Delta f(x) + B_1 h \Delta f'(x) + B_2 \frac{h^2}{1 \cdot 2} \Delta f''(x) + \\ + B_3 \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \Delta f'''(x) + \dots \quad (III')$$

Выведенную формулу иногда называютъ формулой Маклорена, въ виду того, что онъ далъ ее прежде Эйлера въ соч. «Treatise on Fluxions». Эйлеръ, однако, получилъ свою формулу суммированія совершенно самостоятельно и, кромѣ того, подробно изслѣдовалъ ея коэффициенты, а потому мы формулы (III) и (III') будемъ называть формулами Эйлера.

§ 4. 0 функции $F(x) = \frac{x}{e^x - 1}$.

Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что разложеніе въ рядъ по восходящимъ степенямъ функции $F(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ имѣетъ такой видъ:

$$F(x) = \frac{x}{e^x - 1} = 1 + B_1 x + B_2 \frac{x^2}{1 \cdot 2} + B_3 \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \quad (I)$$

Этотъ рядъ часто принимается за основной при изслѣдованіи Б. чиселъ, которыя и опредѣляются, какъ его коэффициенты. Иногда даже формулу суммированія Эйлера выводятъ, основываясь на разложеніи $F(x)$ въ рядъ, при помощи методовъ символическаго обозначенія. Поэтому весьма важно теперь же опредѣлить условія сходимости этого ряда, для чего применимъ теорему Коши. Подставляя въ $F(x)$ $x = 2\pi i$, найдемъ:

$$\frac{2\pi i}{e^{2\pi i} - 1} = \frac{1}{e^{\pi i}} \cdot \frac{\pi}{e^{\pi i} - e^{-\pi i}} = \frac{1}{e^{\pi i}} \cdot \frac{\pi}{2i \sin \pi} = \frac{1}{e^{\pi i}} \cdot \infty$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 - e^{-2}} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right] = \frac{B_2}{2!} + \frac{B_4}{4!} 2^2 + \dots + \frac{B_{2n}}{(2n)!} 2^{2n-2} + \theta \cdot \frac{B_{2n+2}}{(2n+2)!} 2^{2n} =$$

$$\text{Серре т. II стр. 188.} \quad = \frac{2}{2} \int_0^\infty \frac{\sin \alpha t}{e^{2\pi t} - 1} dt$$

Но $e^{-\pi i} = -1$, следовательно, при $x = 2\pi i$, наша функция, становясь прерывной, обращается въ безконечность; поэтому, условием сходимости ряда для $F(x)$ будетъ $\text{mod. } x < 2\pi$. Имѣя въ виду исследование этой функции лишь при действительныхъ значеніяхъ переменнаго, убѣждаемся, что рассматриваемый рядъ сходится при всѣхъ значеніяхъ x , заключающихся въ предѣлахъ -2π и $+2\pi$.

Изъ разложенія $F(x)$ получаются еще разложенія въ ряды слѣдующихъ функций, которыми часто будемъ пользоваться:

$$\frac{x}{e^x + 1} = \frac{x}{e^x - 1} - \frac{2x}{e^{2x} - 1} =$$

$$= \frac{1}{2}x - B_2 \frac{(2^2 - 1)}{1.2} x^2 - B_4 \frac{(2^4 - 1)}{1.2.3.4} x^4 - \dots \quad (1)$$

Здѣсь условиемъ сходимости вычитаемаго ряда будетъ $2x < 2\pi$, поэтому, полученное разложеніе имѣетъ мѣсто при $x < \pi$.

$$\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} = 1 + \frac{2}{e^{2x} - 1} =$$

$$= \frac{1}{x} + B_2 \frac{2^2 x}{1.2} + B_4 \frac{2^4 x^3}{1.2.3.4} + B_6 \frac{2^6 x^5}{1.2 \dots 6} + \dots \quad (2)$$

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 1 - \frac{2}{e^x + 1} = 1 - \frac{2}{x} \cdot \frac{x}{e^x + 1} =$$

$$= \frac{2B_2(2^2 - 1)}{1.2} x + \frac{2B_4(2^4 - 1)}{1.2.3.4} x^3 + \frac{2B_6(2^6 - 1)}{12 \dots 6} x^5 + \dots \quad (3)$$

Послѣдній рядъ, какъ и предыдущій сходится подѣ условіемъ $x < \pi$.

Изъ этихъ формулъ получаются еще разложенія въ ряды тригонометрическихъ функций: $\text{ctg} \theta$, $\text{tg} \theta$, $\text{cosec} \theta$.

Такъ

$$\text{ctg} \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{i(e^{\theta i} + e^{-\theta i})}{e^{\theta i} - e^{-\theta i}},$$

поэтому рядъ для $\text{ctg} \theta$ получимъ изъ (2):

$$\operatorname{ctg} \theta = \frac{1}{\theta} - B_2 \frac{2^2 \theta}{1 \cdot 2} + B_4 \frac{2^4 \theta^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - B_6 \frac{2^6 \theta^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots$$

— рядъ, сходящійся при $\theta < \pi$.

Далѣ, такъ какъ:

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{ctg} \theta - 2 \operatorname{ctg} 2\theta$$

то

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= \left(\frac{1}{\theta} - B_2 \frac{2^2 \theta}{1 \cdot 2} + B_4 \frac{2^4 \theta^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots \right) - \\ &\quad - \left(\frac{1}{\theta} - B_2 \frac{2^2 \cdot 2^2 \theta}{1 \cdot 2} + B_4 \frac{2^4 \cdot 2^4 \theta^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots \right) = \\ &= \frac{2^2(2^2-1)}{1 \cdot 2} B_2 \theta - \frac{2^4(2^4-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} B_4 \theta^3 + \frac{2^6(2^6-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} B_6 \theta^5 - \dots \end{aligned}$$

Здѣсь вычитаемый рядъ сходится при $\theta < \frac{\pi}{2}$ и потому условіемъ сходимости полученнаго ряда будетъ $\theta < \frac{\pi}{2}$.

Такъ какъ

$$\operatorname{cosec} \theta = \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} - \operatorname{ctg} \theta,$$

то

$$\begin{aligned} \operatorname{cosec} \theta &= \frac{2}{\theta} - B_2 \frac{2\theta}{1 \cdot 2} + B_4 \frac{2\theta^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots \\ &\quad - \left(\frac{1}{\theta} - B_2 \frac{2^2 \theta}{1 \cdot 2} + B_4 \frac{2^4 \theta^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots \right) = \\ &= \frac{1}{\theta} + \frac{2(2^2-1)}{1 \cdot 2} B_2 \theta - \frac{2(2^4-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} B_4 \theta^3 + \frac{2(2^6-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} B_6 \theta^5 - \dots \end{aligned}$$

Ряды для $\operatorname{tg} \theta$, $\operatorname{cosec} \theta$ можно получить и прямо изъ разложений (1), (2), (3).

§ 5. Эйлеровы соотношенія между Бернулліевыми числами.

На основаніи предыдущаго, имѣемъ:

$$\frac{\theta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = 1 - B_2 \frac{\theta^2}{1 \cdot 2} + B_4 \frac{\theta^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - B_6 \frac{\theta^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots \quad (1)$$

и

$$\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\theta} - B_2 \frac{\theta}{1 \cdot 2} + B_4 \frac{\theta^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - B_6 \frac{\theta^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots \quad (1')$$

Но $e^{-\pi i} = -1$, следовательно, при $x = 2\pi i$, наша функция, становясь прерывной, обращается в бесконечность; поэтому, условием сходимости ряда для $F(x)$ будет $\text{mod } x < 2\pi$. Имѣя въ виду исследование этой функции лишь при действительныхъ значеніяхъ переменнаго, убѣждаемся, что рассматриваемый рядъ сходится при всѣхъ значеніяхъ x , заключающихся въ предѣлахъ -2π и $+2\pi$.

Изъ разложенія $F(x)$ получаются еще разложенія въ ряды слѣдующихъ функций, которыми часто будемъ пользоваться:

$$\begin{aligned} \frac{x}{e^x + 1} &= \frac{x}{e^x - 1} - \frac{2x}{e^{2x} - 1} = \\ &= \frac{1}{2}x - B_2 \frac{(2^2 - 1)}{1 \cdot 2} x^3 - B_4 \frac{(2^4 - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^5 - \dots \quad (1) \end{aligned}$$

Здѣсь условиемъ сходимости вычитаемого ряда будетъ $2x < 2\pi$, поэтому полученное разложеніе имѣетъ мѣсто при $x < \pi$.

$$\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} = 1 + \frac{2}{e^{2x} - 1} = \quad (2)$$

$$= \frac{1}{x} + B_2 \frac{2^2 x}{1 \cdot 2} + B_4 \frac{2^4 x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + B_6 \frac{2^6 x^5}{1 \cdot 2 \dots 6} + \dots$$

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 1 - \frac{2}{e^x + 1} = 1 - \frac{2}{x} \cdot \frac{x}{e^x + 1} =$$

$$= \frac{2B_2(2^2 - 1)}{1 \cdot 2} x + \frac{2B_4(2^4 - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^3 + \frac{2B_6(2^6 - 1)}{1 \cdot 2 \dots 6} x^5 + \dots \quad (3)$$

Послѣдній рядъ, какъ и предыдущій сходится подѣ условіемъ $x < \pi$.

Изъ этихъ формулъ получаются еще разложенія въ ряды тригонометрическихъ функций: $\text{ctg} \theta$, $\text{tg} \theta$, $\text{cosec} \theta$.

Такъ

$$\text{ctg} \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{i(e^{\theta i} + e^{-\theta i})}{e^{\theta i} - e^{-\theta i}},$$

поэтому рядъ для $\text{ctg} \theta$ получимъ изъ (2):

$$\operatorname{ctg} \theta = \frac{1}{\theta} - B_2 \frac{2^2 \theta}{1 \cdot 2} + B_4 \frac{2^4 \theta^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - B_6 \frac{2^6 \theta^5}{1 \cdot 2 \dots 6} + \dots$$

— рядъ, сходящійся при $\theta < \pi$.

Далѣ, такъ какъ:

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{ctg} \theta - 2 \operatorname{ctg} 2\theta$$

то

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= \left(\frac{1}{\theta} - B_2 \frac{2^2 \theta}{1 \cdot 2} + B_4 \frac{2^4 \theta^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots \right) - \\ &\quad - \left(\frac{1}{\theta} - B_2 \frac{2^2 \cdot 2^2 \theta}{1 \cdot 2} + B_4 \frac{2^4 \cdot 2^4 \theta^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots \right) = \\ &= \frac{2^2(2^2-1)}{1 \cdot 2} B_2 \theta - \frac{2^4(2^4-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} B_4 \theta^3 + \frac{2^6(2^6-1)}{1 \cdot 2 \dots 6} B_6 \theta^5 - \dots \end{aligned}$$

Здѣсь вычитаемый рядъ сходится при $\theta < \frac{\pi}{2}$ и потому условіемъ сходимости полученнаго ряда будетъ $\theta < \frac{\pi}{2}$.

Такъ какъ

$$\operatorname{cosec} \theta = \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} - \operatorname{ctg} \theta,$$

то

$$\begin{aligned} \operatorname{cosec} \theta &= \frac{2}{\theta} - B_2 \frac{2\theta}{1 \cdot 2} + B_4 \frac{2\theta^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots \\ &\quad - \left(\frac{1}{\theta} - B_2 \frac{2^2 \theta}{1 \cdot 2} + B_4 \frac{2^4 \theta^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots \right) = \\ &= \frac{1}{\theta} + \frac{2(2^2-1)}{1 \cdot 2} B_2 \theta - \frac{2(2^4-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} B_4 \theta^3 + \frac{2(2^6-1)}{1 \cdot 2 \dots 6} B_6 \theta^5 - \dots \end{aligned}$$

Ряды для $\operatorname{tg} \theta$, $\operatorname{cosec} \theta$ можно получить и прямо изъ разложеній (1), (2), (3).

§ 5. Эйлеровы соотношенія между Бернуллиевыми числами.

На основаніи предыдущаго, имѣемъ:

$$\frac{\theta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = 1 - B_2 \frac{\theta^2}{1 \cdot 2} + B_4 \frac{\theta^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - B_6 \frac{\theta^6}{1 \cdot 2 \dots 6} + \dots \quad (1)$$

и

$$\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\theta} - B_2 \frac{\theta}{1 \cdot 2} + B_4 \frac{\theta^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - B_6 \frac{\theta^5}{1 \cdot 2 \dots 6} + \dots \quad (1')$$

—ряды, сходящиеся при $\frac{\theta}{2} < \pi$, т. е. $\theta < 2\pi$. При помощи послѣд-
няго изъ нихъ Эйлеръ нашелъ новыя соотношенія между Бернул-
лиевыми числами, въ которыхъ они входятъ во 2-й степени.

Чтобы вывести ихъ, означимъ ради краткости:

$$\frac{1}{2} \cotg \frac{\theta}{2} = s = \frac{1}{\theta} + A_1 \theta + A_2 \theta^2 + \dots + A_k \theta^{2k-1} + \dots \quad (2)$$

такъ что:

$$A_k = \frac{(-1)^k B_{2k}}{1 \cdot 2 \dots 2k}; \quad \frac{\theta}{2} = \operatorname{arctg} 2s,$$

откуда чрезъ дифференцированіе имѣемъ:

$$\frac{1}{2} d\theta = - \frac{2ds}{1+4s^2}; \quad \frac{ds}{d\theta} + s^2 = - \frac{1}{4} \quad (3)$$

Но изъ уравненія (2) слѣдуетъ:

$$\frac{ds}{d\theta} = - \frac{1}{\theta^2} + A_1 + 3A_2 \theta^2 + 5A_3 \theta^4 + 7A_4 \theta^6 + \dots$$

$$s^2 = \frac{1}{\theta^2} + 2A_1 + 2A_2 \left| \begin{array}{l} \theta^2 + 2A_1 \\ + A_1^2 \end{array} \right| \theta^4 + 2A_3 \left| \begin{array}{l} \theta^4 + 2A_1 \theta^2 + 2A_2 \\ + 2A_1 A_2 \end{array} \right| \theta^6 + \dots$$

Подставивъ въ уравненіе (3) значенія $\frac{ds}{d\theta}$ и s^2 , мы найдемъ, изъ
сравненія коэффиціентовъ при одинаковыхъ степеняхъ θ :

$$3A_1 = - \frac{1}{4}$$

$$5A_2 = - A_1^2$$

$$7A_3 = - 2A_1 A_2$$

$$9A_4 = - 2A_1 A_3 - A_2^2$$

.....

$$(2k+1)A_k = - (2A_1 A_{k-1} + 2A_2 A_{k-2} + \dots)$$

Послѣдній членъ во 2-й части послѣдняго равенства будетъ при k четномъ A_k^2 , при k нечетномъ $2A_{k-1} A_{k+1}$.

Поэтому при k четномъ:

$$A_k = -\frac{2}{2k+1} \left(A_1 A_{k-1} + A_3 A_{k-3} + \dots + \frac{A_k^2}{2} \right);$$

при k нечетномъ:

$$A_k = -\frac{2}{2k+1} (A_1 A_{k-1} + A_3 A_{k-3} + \dots + A_{k-2} A_{k+1}).$$

Замѣняя коэффициенты A ихъ выраженіями чрезъ Бернуллиевы числа, найдемъ отсюда:

$$B_k = -\frac{2}{2k+1} 1.2 \dots 2k \left[\frac{B_1}{1.2} \cdot \frac{B_{k-1}}{1.2 \dots (2k-2)} + \right. \\ \left. + \frac{B_3}{1.2.3.4} \cdot \frac{B_{k-3}}{1.2 \dots (2k-4)} + \dots \right] \quad (4)$$

Подобно соотношеніямъ Моавра, выведенная формула пригодна для вычисленія B_k , когда знаемъ значенія B . чиселъ, ему предшествующихъ.

Такъ, по этой формулѣ:

$$B_{14} = -\frac{2}{15} \cdot 14! \left(\frac{B_1}{1.2} \cdot \frac{B_{12}}{12!} + \frac{B_3}{4!} \cdot \frac{B_{10}}{10!} + \frac{B_5}{6!} \cdot \frac{B_8}{8!} \right)$$

или

$$B_{14} = -\frac{2}{15} (91! B_1 B_{12} + 1001 B_3 B_{10} + 3003 B_5 B_8) = \frac{7}{6}.$$

Кромѣ соотношеній 2-го порядка, Эйлеромъ получены и ннны зависимости между B . числами, которыя неудобны для вычисленія ихъ, но тѣмъ не менѣе весьма замѣчательны, такъ какъ обнаруживаютъ связь между рядомъ B . чиселъ и степенями числа π .

Чтобы получить первую подобную формулу, положимъ въ рядѣ (1), который сходится при $\theta < 2\pi$, $\theta = \pi$, найдемъ:

$$B_2 \frac{\pi^2}{1.2} - B_4 \frac{\pi^4}{1.2.3.4} + B_6 \frac{\pi^6}{1.2 \dots 6} - \dots = 1.$$

Далѣе, дифференцируя (1), имѣемъ:

$$\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} - \frac{\theta}{4} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} = -2B_2 \frac{\theta^2}{1.2} +$$

$$+ 4B_4 \frac{\theta^4}{1.2.3.4} - 6B_6 \frac{\theta^6}{1.2 \dots 6} + \dots$$

полагая здѣсь $\theta = \pi$, найдемъ:

$$B_2 - B_4 \frac{\pi^2}{1.2.3} + B_6 \frac{\pi^4}{1.2 \dots 5} - \dots = \frac{1}{4}.$$

Къ числу соотношеній подобнаго же рода должно отнести еще замѣчательные безконечные ряды, которые получимъ, полагая $x=1$ въ разложеніяхъ (I), (1) и (2) предыдущаго §:

$$1 + B_2 + \frac{B_4}{1.2} + \frac{B_6}{1.2.3.4} + \frac{B_8}{1.2 \dots 6} + \dots = \frac{1}{e-1}$$

$$\frac{1}{2} - B_2 \frac{(2^2-1)}{1.2} - B_4 \frac{(2^4-1)}{1.2.3.4} - B_6 \frac{(2^6-1)}{1.2 \dots 6} - \dots = \frac{1}{e+1}$$

$$B_2 \frac{2^2}{1.2} + B_4 \frac{2^4}{1.2.3.4} + B_6 \frac{2^6}{1.2 \dots 6} + \dots = \frac{1}{e^2-1}.$$

§ 6. Независимое выраженіе Бернуллиева числа.

Эйлеру принадлежит и первое выраженіе, опредѣляющее число B_n , независимо отъ чиселъ, ему предшествующихъ. Для полученія его обыкновенно пользуются разложеніемъ въ рядъ $\operatorname{ctg} \theta$. Именно, мы имѣли:

$$\operatorname{ctg} \theta = \frac{1}{\theta} - B_2 \frac{2^2 \theta}{1.2} + B_4 \frac{2^4 \theta^3}{1.2.3.4} - \dots + B_{2n} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n} \theta^{2n-1}}{1.2 \dots 2n} \dots (a)$$

Но

$$\operatorname{ctg} \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{d}{d\theta} (\lg \sin \theta),$$

$$\frac{1}{2\theta} = 1 - \frac{B_2}{1.2} - \frac{B_4}{3.4} - \frac{B_6}{5.6} - \dots$$

пользуясь же выражением $\sin \theta$ чрезъ безконечное произведение, имѣемъ:

$$\sin \theta = \theta \prod_{m=1}^{m=\infty} \left(1 - \frac{\theta^2}{m^2 \pi^2} \right);$$

$$\begin{aligned} \lg \sin \theta &= \lg \theta + \sum_{m=1}^{m=\infty} \lg \left(1 - \frac{\theta^2}{m^2 \pi^2} \right) = \\ &= \lg \theta - \frac{\theta^2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} - \frac{1}{2} \frac{\theta^4}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} - \frac{1}{3} \frac{\theta^6}{\pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^6} - \dots \end{aligned}$$

Входящія въ это выраженіе ряды вида:

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{m^{2p}} = \frac{1}{1^{2p}} + \frac{1}{2^{2p}} + \dots + \frac{1}{k^{2p}} + \frac{1}{(k+1)^{2p}} + \dots$$

суть сходящіеся; дѣйствительно:

$$\frac{1}{(k+1)^{2p}} : \frac{1}{k^{2p}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{k} \right)^{2p}}$$

что менѣе, чѣмъ $\frac{1}{1 + \frac{2p}{k}}$, и потому, по правилу Раабе, рядъ $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2p}}$

есть сходящійся. Означая его чрезъ s_{2p} , находимъ:

$$\lg(\sin \theta) = \lg \theta - \frac{s_2 \theta^2}{\pi^2} - \frac{1}{2} \frac{s_4 \theta^4}{\pi^4} - \frac{1}{3} \frac{s_6 \theta^6}{\pi^6} - \dots,$$

откуда, чрезъ дифференцированіе по θ , получимъ:

$$\operatorname{ctg} \theta = \frac{1}{\theta} - \frac{2s_2 \theta}{\pi^2} - \frac{2s_4 \theta^3}{\pi^4} - \frac{2s_6 \theta^5}{\pi^6} - \dots - \frac{2s_{2n} \theta^{2n-1}}{\pi^{2n}} - \dots \quad (b)$$

Сравнивая коэффициенты при одинакихъ степеняхъ θ въ (a) и (b), найдемъ:

$$B_{2n} = 2 \cdot (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 2 \dots 2n}{(2\pi)^{2n}} \cdot s_{2n}$$

$$B_{2n} = -(-1)^n \frac{2^{2n} (2n)!}{(2\pi)^{2n}} S_{2n}$$

— 25 —

или

$$B_{2n} = 2 \cdot (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 2 \dots 2n}{(2\pi)^{2n}} \left[1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \dots \right] \quad (1)$$

—Эйлерово независимое выражение Н. числа.

Это замѣчательное выраженіе содержитъ число π и, кромѣ того, сумму безконечнаго ряда s_{2n} , въ то время какъ Б. числа суть числа рациональныя; поэтому изъ него нельзя получить точнаго значенія B_{2n} , но лишь приближенное, съ любой степенью точности. Тѣмъ не менѣе, это выраженіе легко обнаруживаетъ цѣлый рядъ свойствъ Б. чиселъ и весьма употребительно въ Анализѣ.

Разсматривая его, мы прежде всего замѣчаемъ, что въ рядѣ Б. чиселъ положительныя числа чередуются съ отрицательными; именно, отрицательныя Б. числа—тѣ, индексы которыхъ дѣлятся на 4; B_4, B_8, B_{12}, \dots . Между числами B_{2n} и B_{2n+2} , изъ которыхъ непремѣнно одно положительное, а другое—отрицательное, имѣемъ: $B_{2n+1} = 0$; такимъ образомъ, три послѣдовательныхъ Б. числа можно разсматривать какъ 3 послѣдовательныхъ значенія нѣкоторой прерывной функціи, имѣющей мѣсто лишь при цѣлыхъ значеніяхъ аргумента и обладающей тѣмъ свойствомъ, что она поочередно принимаетъ положительныя и отрицательныя значенія, обращаясь въ 0 при нечетныхъ значеніяхъ аргумента.

Мы видѣли, что 3 первыхъ Б. числа идутъ уменьшаясь по абсолютной величинѣ:

$$B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}.$$

Но далѣе уже $B_8 = -\frac{1}{30}$, и, пользуясь формулой Эйлера, можно показать, что затѣмъ ужъ каждое Б. число по абсолютной величинѣ болѣе числа, ему предшествующаго. Для этого замѣтимъ сперва, что, обозначая абсолютную величину числа B_{2k} чрезъ $|B_{2k}|$, мы имѣемъ:

$$\frac{|B_{2n+2}|}{|B_{2n}|} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{2^2 \pi^2} \cdot \frac{s_{2n+2}}{s_{2n}} \quad (2)$$

Затѣмъ, такъ какъ $B_1 = \frac{s_1}{\pi^2} = \frac{1}{6}$, то $s_1 = \frac{\pi^2}{6}$ и, въ виду того, что вообще $s_{k+1} < s_k$, имѣемъ:

$$s_n < \frac{\pi^2}{6}$$

и, значитъ, также

$$\frac{s_n}{s_{n+1}} < \frac{\pi^2}{6},$$

ибо $s_{n+1} > 1$, т. е. во всякомъ случаѣ $\frac{s_n}{s_{n+1}} < 1,6$ и $\frac{s_{n+1}}{s_n} > 0,6$.

Полагая теперь во (2) $n=4$, имѣемъ:

$$\frac{|B_{10}|}{|B_8|} = \frac{9 \cdot 10}{4\pi^2} \cdot \frac{s_{10}}{s_8};$$

замѣняя здѣсь $\frac{s_{10}}{s_8}$ чрезъ 0,6 и π чрезъ 3,14, найдемъ:

$$\frac{|B_{10}|}{|B_8|} > \frac{9 \cdot 10}{4 \cdot (3,14)^2} \cdot 0,6; \quad \frac{|B_{10}|}{|B_8|} > \frac{9 \cdot 10 \cdot 0,6}{39,43}; \quad |B_{10}| > |B_8|$$

Тѣмъ болѣе, при $n=5$,

$$\frac{|B_{12}|}{|B_{10}|} > \frac{11 \cdot 12 \cdot 0,6}{39,43} > 1$$

и $|B_{12}| > |B_{10}|$. Следовательно, при дальнѣйшемъ увеличеніи n , каждое Б. число по абсолютной величинѣ будетъ болѣе предыдущаго, и потому, за исключеніемъ B_1 и B_2 , другихъ равныхъ между собою Б. чиселъ нѣтъ. При $n=7$ имѣемъ $B_7 = \frac{7}{6}$ — первое Б. число, превышающее по абсолютной величинѣ 1. Съ возрастаніемъ же n до безконечности, абсолютныя значенія чиселъ Я. Бернулли возрастаютъ болѣе всякой данной конечной величины; дѣйствительно, равенство (2) даетъ:

$$\lim \frac{|B_{2n+2}|}{|B_{2n}|} = \lim \left\{ \frac{(2n+1)(2n+2)}{2^2 \pi^2} \cdot \frac{s_{2n+2}}{s_{2n}} \right\}$$

Такъ какъ здѣсь второй множитель съ увеличеніемъ n стремится къ 1, а первый къ ∞ , то дѣйствительно, абсолютныя значенія B . чиселъ, возрастая, должны дѣлаться болѣе всякой конечной величины. Такъ какъ, притомъ, это возрастаніе зависитъ отъ n во 2-й степени, то оно идетъ чрезвычайно быстро.

Замѣняя въ формулѣ (1) s_{2n} чрезъ 1, получимъ, очевидно, нижшій предѣлъ для $|B_{2n}|$:

$$|B_{2n}| > 2 \cdot \frac{1 \cdot 2 \dots 2n}{(2\pi)^{2n}}$$

Наивысшій же предѣлъ для $|B_{2n}|$ найдемъ изъ отношенія:

$$\frac{|B_{2n}|}{|B_2|} = 2 \cdot \frac{2n!}{(2\pi)^{2n}} \cdot \frac{s_{2n}}{s_2} \cdot \pi^2 = \frac{1 \cdot 2 \dots 2n}{2^{2n-1} \pi^{2n-1}} \cdot \frac{s_{2n}}{s_2},$$

замѣнивъ $\frac{s_{2n}}{s_2}$ чрезъ 1; получимъ:

$$\frac{2}{(2\pi)^{2n}} < \frac{\beta_{2n}}{(2n)!} < \frac{\pi^2}{3 \cdot (2\pi)^{2n}}$$

$$|B_{2n}| < \frac{1}{12} \cdot \frac{1 \cdot 2 \dots 2n}{(2\pi)^{2n-1}}$$

Но, по формулѣ Стирлинга,

$$\Gamma(m+1) = m^{\left(m + \frac{1}{2}\right)} e^{-m} \sqrt{2\pi} \cdot e^{\theta/12m}$$

гдѣ $0 < \theta < 1$, поэтому выраженія предѣловъ примутъ видъ:

$$|B_{2n}| > 2 \cdot \frac{(2n)^{2n + \frac{1}{2}} e^{-2n}}{(2\pi)^{2n - \frac{1}{2}}}$$

■

$$|B_{2n}| < \frac{1}{12} \cdot \frac{(2n)^{2n + \frac{1}{2}} e^{-2n}}{(2\pi)^{2n - \frac{5}{2}}} \cdot e^{\frac{1}{24n}}$$

Отношение высшего предѣла къ низшему, будетъ:

$$\frac{1}{12} \cdot \frac{(2\pi)^{2n-\frac{1}{2}}}{2} \cdot e^{\frac{1}{24n}} = \frac{1}{6} \cdot e^{\frac{1}{24n}}$$

§ 7. Выраженіе Бернуллиева числа при помощи бесконечнаго произведенія.

Бесконечный рядъ:

$$s_{2n} = 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{6^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \frac{1}{8^{2n}} + \dots$$

входящій въ Эйлерово независимое выраженіе Б. числа, можетъ быть преобразованъ въ бесконечное произведеніе, зависящее только отъ простыхъ чиселъ въ ихъ естественномъ порядкѣ. Чтобы сдѣлать такое преобразованіе, умножимъ обѣ части (1) на $\frac{1}{2^{2n}}$, будетъ:

$$\frac{1}{2^{2n}} \cdot s_{2n} = \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \frac{1}{6^{2n}} + \frac{1}{8^{2n}} + \frac{1}{10^{2n}} + \frac{1}{12^{2n}} + \frac{1}{14^{2n}} + \frac{1}{16^{2n}} + \dots$$

Вычитая этотъ рядъ изъ (1), находимъ:

$$s_{2n} \left(1 - \frac{1}{2^{2n}} \right) = 1 + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \frac{1}{9^{2n}} + \dots \quad (2)$$

Здѣсь бесконечный рядъ во 2-й части уже не содержитъ членовъ вида $\frac{1}{(2k)^{2n}}$. Умножая затѣмъ (2) на $\frac{1}{3^{2n}}$ и результатъ вычитая изъ (2), получимъ:

$$s_{2n} \left(1 - \frac{1}{2^{2n}} \right) \left(1 - \frac{1}{3^{2n}} \right) = 1 + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \frac{1}{11^{2n}} + \dots + \frac{1}{25^{2n}} + \dots$$

—выраженіе, въ которомъ бесконечный рядъ не содержитъ дробей, знаменатели которыхъ суть числа кратныя 2 и 3. Подоб-

нымъ же образомъ исключимъ изъ 2-й части дроби, знаменатели которыхъ содержатъ множители 5, 7, 11, 13... Положимъ, что мы, наконецъ, исключили всѣ дроби, знаменатели которыхъ суть числа, кратныя простому числу α , тогда:

$$s_{2,n} \left(1 - \frac{1}{2^{2n}}\right) \left(1 - \frac{1}{3^{2n}}\right) \left(1 - \frac{1}{5^{2n}}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{\alpha^{2n}}\right) = 1 + R,$$

гдѣ въ составъ дополнительнаго члена R входятъ дроби, знаменатели которыхъ состоятъ изъ простыхъ множителей, превышающихъ α . И такъ какъ простыхъ чиселъ [бесконечное множество, то, останавливаясь на достаточно большомъ числѣ α , можно сдѣлать R какъ угодно малымъ, и въ предѣлѣ:

$$s_{2,n} \left(1 - \frac{1}{2^{2n}}\right) \left(1 - \frac{1}{3^{2n}}\right) \left(1 - \frac{1}{5^{2n}}\right) \dots = 1.$$

и

$$s_{2,n} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^{2n}}\right) \left(1 - \frac{1}{3^{2n}}\right) \left(1 - \frac{1}{5^{2n}}\right) \dots}$$

Поэтому Бернуллиево число принимаетъ такой видъ:

$$B_{2n} = 2(-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 2 \dots 2n}{(2\pi)^{2n}} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^{2n}}\right) \left(1 - \frac{1}{3^{2n}}\right) \left(1 - \frac{1}{5^{2n}}\right) \dots}$$

Это выраженіе устанавливаетъ, такимъ образомъ, связь между B . числомъ и рядомъ простыхъ чиселъ. Его мы находимъ у Раабе (Differential-Rechnung, I, 412), который, однако, приписываетъ преобразование ряда $s_{2,n}$ въ бесконечное произведеніе самому Эйлеру.

§ 8. Таблицы Эйлера.

Для приближеннаго вычисленія B . чиселъ Эйлеръ предложилъ таблицу значений $s_{2,n}$ съ 16 десятичными знаками, доведенную, впрочемъ, только до $s_{4,6}$. Кромѣ того, имъ вычислены и точныя значенія B . чиселъ до $B_{3,9}$ включительно.

Вотъ эти значенія:

старае абозначенні

— 81 —

старае абзначенні

	$B_0 = 1$		
	$B_1 = -\frac{1}{2}$	$B_{11} = -\frac{3617}{510}$	$-B_8$
B_1	$B_2 = \frac{1}{6} + 1$	$B_{12} = \frac{43\ 867}{798}$	B_9
$-B_2$	$B_3 = -\frac{1}{30} - 1$	$B_{13} = \frac{1\ 74611}{330}$	$-B_{10}$
B_3	$B_4 = \frac{1}{42} + 3$	$B_{14} = \frac{8\ 54513}{138}$	B_{11}
$-B_4$	$B_5 = -\frac{1}{30} - 17$	$B_{15} = \frac{2363\ 64091}{2730}$	$-B_{12}$
B_5	$B_{11} = \frac{5}{66} + 155$	$B_{16} = \frac{85\ 58103}{6}$	B_{13}
$-B_6$	$B_{12} = \frac{491}{2730} - 2073$	$B_{17} = \frac{2\ 87494\ 61029}{870}$	$-B_{14}$
B_7	$B_{13} = \frac{7}{6} + 38227$	$B_{18} = \frac{861\ 58412\ 76005}{14322}$	B_{15}

Г Л А В А П.

Развитіе ученія Эймара о Бернуліевыхъ числахъ,

§ 9. Формула Лапласа.

Главнѣйшей задачей изслѣдователей чиселъ Я. Бернулли послѣ Эйлера было нахожденіе раціональнаго выраженія числа B_n , независимо отъ чиселъ, ему предшествующихъ, ибо возвратныя соотношенія Муавра и Эйлера неудобны для вычисленія B_n чиселъ при большомъ указателѣ, а Эйлерово независимое выраженіе, содержа число π и сумму безконечнаго ряда, пригодно лишь для приближеннаго вычисленія чиселъ Я. Бернулли. Вопросъ этотъ впервые былъ рѣшенъ Лапласомъ.

Прежде чѣмъ вывести формулу Лапласа, замѣтимъ, что для получения независимаго выраженія B . числа было бы наиболее естественно воспользоваться разложеніемъ:

$$F(x) = \frac{x}{e^x - 1} = 1 + B_1 x + B_2 \frac{x^2}{1 \cdot 2} + B_3 \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

ибо изъ формулы Маклорена слѣдуетъ, что $B_{2n} = F^{(2n)}(0)$. Однако подстановка $x=0$ здѣсь приводитъ къ неопредѣленному выраженію вида $\frac{0}{0}$, неразрѣшиму обыкновенными приемами. Поэтому

Лапласъ при выводѣ своей формулы воспользовался разложеніемъ въ рядъ не этой, а другой функціи, которую мы имѣли въ § 4:

$$\frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{2} - B_1 \frac{(2^1 - 1)}{1 \cdot 2} x - B_2 \frac{(2^2 - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^2 - B_3 \frac{(2^3 - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} x^3 - \dots$$

Рядъ этотъ сходится при $x < \pi$; изъ него слѣдуетъ:

$$B_{2n} = -\frac{2n}{2^{2n} - 1} \left[\frac{d^{2n-1} \left(\frac{1}{e^x + 1} \right)}{dx^{2n-1}} \right]_{x=0}$$

Но

$$\frac{d \left(\frac{1}{e^x + 1} \right)}{dx} = -\frac{e^x}{(e^x + 1)^2}, \quad \frac{d^2 \left(\frac{1}{e^x + 1} \right)}{dx^2} = \frac{e^{2x} - e^x}{(e^x + 1)^3},$$

$$\frac{d^3 \left(\frac{1}{e^x + 1} \right)}{dx^3} = \frac{-e^{3x} + e^{2x} - e^x}{(e^x + 1)^4}$$

и т. д., такъ что производная $(2n - 1)$ -го порядка отъ той же функціи имѣетъ видъ:

$$\frac{d^{2n-1} \left(\frac{1}{e^x + 1} \right)}{dx^{2n-1}} = \frac{P_1 e^{(2n-1)x} + P_2 e^{(2n-2)x} + \dots + P_{2n-1} e^x}{(e^x + 1)^{2n}},$$

гдѣ P_1, P_2, \dots — числовые множители, не зависящіе отъ x .

Отсюда:

$$(e^x+1)^{2n} \frac{d^{2n-1} \left(\frac{1}{e^x+1} \right)}{dx^{2n-1}} = P_1 e^{(2n-1)x} + P_2 e^{(2n-2)x} + \dots + P_{2n-1} e^x.$$

Такъ какъ правая часть этого равенства оканчивается членомъ съ e^x , то и лѣвая часть его, будучи расположена по нисходящимъ степенямъ того же количества, должна оканчиваться членомъ, содержащимъ e^x . Но:

$$\frac{1}{e^x+1} = e^{-x} [1 - (-e^{-x})] = e^{-x} - e^{-2x} + e^{-3x} - \dots$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{d^{2n-1} \left(\frac{1}{e^x+1} \right)}{dx^{2n-1}} = -(e^{-x} - 2^{2n-1} e^{-2x} + 3^{2n-1} e^{-3x} - \dots)$$

поэтому, сдѣлавъ умноженіе, найдемъ:

$$(e^x+1)^{2n} \frac{d^{2n-1} \left(\frac{1}{e^x+1} \right)}{dx^{2n-1}} = - \left\{ e^{(2n-1)x} - e^{(2n-2)x} (2^{2n-1} - 2n) + \right. \\ \left. + e^{(2n-3)x} \left[3^{2n-1} - 2n \cdot 2^{2n-1} + \frac{2n(2n-1)}{1 \cdot 2} \right] + \dots \right\}$$

Полагая же $x=0$, найдемъ:

$$\left\{ \frac{d^{2n-1} \left(\frac{1}{e^x+1} \right)}{dx^{2n-1}} \right\}_{x=0} = - \frac{1}{2^{2n}} \left\{ 1 - (2^{2n-1} - 2n) + \right. \\ \left. + \left[3^{2n-1} - 2n \cdot 2^{2n-1} + \frac{2n(2n-1)}{1 \cdot 2} \right] - \dots \right\}$$

и

$$B_{2n} = \frac{2n}{2^{2n}(2^{2n}-1)} \left\{ 1 - (2^{2n-1} - 2n) + \left[3^{2n-1} - 2n \cdot 2^{2n-1} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2n(2n-1)}{1 \cdot 2} \right] - \dots + \left[(2n-1)^{2n-1} - 2n(2n-2)^{2n-1} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2n(2n-1)}{1 \cdot 2} (2n-3)^{2n-1} - \dots \right] \right\}$$

Здѣсь членовъ въ скобкахъ во 2-й части $2n-1$, но полученное равенство можетъ быть упрощено, такъ что будетъ содержать лишь n членовъ; дѣйствительно, въ немъ могутъ быть соединены попарно 1-й и послѣдній члены, а также члены, равно отстоящіе отъ нихъ, ибо эти члены равны, что можно доказать, пользуясь формулой:

$$\Delta^m x^p = (x+m)^p - \frac{m}{1} (x+m-1)^p + \frac{m(m-1)}{1.2} (x+m-2)^p - \dots \\ \dots + (-1)^{m-1} m (x+1)^p + (-1)^m x^p.$$

Полагая здѣсь $m=2n$, $p=2n-1$ и $x=-1, -2, -3 \dots$ послѣдовательно найдемъ, замѣчая, что $\Delta^{2n} x^{2n-1} = 0$:

$$(2n-1)^{2n-1} - \frac{2n}{1} (2n-2)^{2n-1} + \frac{2n(2n-1)}{1.2} (2n-3)^{2n-1} - \dots \\ \dots + \frac{2n(2n-1)}{1.2} = 1; \\ (2n-2)^{2n-1} - \frac{2n}{1} (2n-3)^{2n-1} + \frac{2n(2n-1)}{1.2} (2n-4)^{2n-1} - \dots \\ \dots - \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1.2.3} = 2^{2n-1} - 2n. \\ (2n-3)^{2n-1} - \frac{2n}{1} (2n-4)^{2n-1} + \dots + \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{1.2.3.4} = \\ = 3^{2n-1} - 2n. 2^{2n-1} + \frac{2n(2n-1)}{1.2} \\ \dots \dots \dots (A)$$

Итакъ, дѣйствительно, члены крайніе и равностоящіе отъ крайнихъ въ найденномъ выраженіи для B_{2n} равны, и потому:

$$B_{2n} = \frac{2n}{2^{2n}(2^{2n}-1)} \left\{ 2.1 - 2(2^{2n-1} - 2n) + \right. \\ + 2 \left[3^{2n-1} - 2n. 2^{2n-1} + \frac{2n(2n-1)}{1.2} \right] - \dots \\ \dots + (-1)^{n-2} \left[(n-1)^{2n-1} - \frac{2n}{1} (n-2)^{2n-1} + \right. \\ + \frac{2n(2n-1)}{1.2} (n-3)^{2n-1} - \dots \left. \right] + \\ + (-1)^{n-1} \left[n^{2n-1} - \frac{2n}{1} (n-1)^{2n-1} + \right. \\ + \frac{2n(2n-1)}{1.2} (n-3)^{2n-1} - \dots \left. \right] \left. \right\}$$

или

$$B_{2n} = \frac{2n}{2^{2n-1}(2^{2n-1}-1)} \cdot (-1)^{n-1} \left\{ \frac{1}{2} \left[n^{2n-1} - \frac{2n}{1} (n-1)^{2n-1} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2n(2n-1)}{1 \cdot 2} (n-2)^{2n-1} - \dots \right] - \right. \\ \left. - \left[(n-1)^{2n-1} - \frac{2n}{1} (n-2)^{2n-1} + \frac{2n(2n-1)}{1 \cdot 2} (n-3)^{2n-1} - \dots \right] + \right. \\ \left. + \left[(n-2)^{2n-1} - \frac{2n}{1} (n-3)^{2n-1} + \frac{2n(2n-1)}{1 \cdot 2} (n-4)^{2n-1} - \dots \right] - \dots \right\}$$

Дѣлая упрощеніе, окончательно получимъ:

$$B_{2n} = \frac{2n}{2^{2n-1}(2^{2n-1}-1)} \cdot (-1)^{n-1} \left\{ \frac{1}{2} n^{2n-1} - (n-1)^{2n-1} \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2n}{1} \right] + \right. \\ \left. + (n-2)^{2n-1} \left[1 + \frac{2n}{1} + \frac{1}{2} \frac{2n(2n-1)}{1 \cdot 2} \right] - \right. \\ \left. - (n-3)^{2n-1} \left[1 + \frac{2n}{1} + \frac{2n(2n-1)}{1 \cdot 2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right] + \dots \right\}$$

— формула Лапласа; она была предложена въ 1777 году (Mém. de l'Acad. des sciences de Paris). Вычисляя по ней, напр., B_{10} , находимъ:

$$B_{10} = \frac{10}{2^9(2^{10}-1)} \left\{ \frac{1}{2} 5^9 - 4^9(1+5) + 3^9(1+10 + \frac{45}{2}) - 2^9(1+10 + \right. \\ \left. + 45 + 60) + (1+10+45+120+105) \right\} = \frac{155}{1023 \cdot 2} = \frac{5}{66}.$$

§ 10. Соотношенія Мейера.

Вычисленіе по формулѣ Лапласа Б. числа съ большимъ указателемъ представляетъ, вслѣдствіе сложности, почти такія же затрудненія, какъ и нахожденіе его изъ соотношеній Моавра или Эйлера. Поэтому, хотя независимое выраженіе Б. числа стало уже извѣстно, изслѣдователи продолжали изучать тѣ взаимныя

$$B_{2n} = \frac{2n}{2^{2n-1}(2^{2n-1}-1)} \cdot (-1)^{n-1} \left\{ \frac{1}{2} n^{2n-1} - (n-1)^{2n-1} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{2n}{1} \right] + (n-2)^{2n-1} \left[1 + \frac{2n}{1} + \frac{1}{2} \frac{2n(2n-1)}{1 \cdot 2} \right] - \dots \right\}$$

соотношения, которые числа Я. Бернулли образуют между собою. При этомъ оказалось, что кромѣ известныхъ намъ соотношеній Моавра и Эйлера, можно установить весьма значительное число еще новыхъ, подобныхъ же формулъ, которые всѣ, съ большимъ или меньшимъ удобствомъ, могутъ служить для вычисленія Б. чиселъ и изъ которыхъ многія весьма замѣчательны по своему составу. Для полученія ихъ всего чаще употреблялось разложение въ рядъ функціи $F(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ и другихъ, [которые могутъ быть получены изъ нея помощію различныхъ преобразованій. Такъ, Мейеръ далъ слѣдующія формулы подобнаго рода.

1. Мы имѣемъ:

$$F(x) = \frac{x}{e^x - 1} = 1 + B_1 x + B_2 \frac{x^2}{1 \cdot 2} + B_4 \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

но съ другой стороны:

$$F(x) = \frac{1 + e^x}{2} \cdot \frac{2x}{e^{2x} - 1} = \frac{1 + e^x}{2} \cdot F(2x),$$

отсюда

$$e^{-x} \cdot F(x) = (e^{-x} + 1) \cdot \frac{1}{2} F(2x),$$

или, разлагая функціи въ ряды,

$$\begin{aligned} & \left(1 - x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} - \dots\right) \cdot \left(1 + B_1 x + B_2 \frac{x^2}{1 \cdot 2} + B_4 \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots\right) = \\ & = \left(2 - x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} - \dots\right) \left(\frac{1}{2} + B_1 x + B_2 \frac{2x^2}{1 \cdot 2} + B_4 \frac{2^3 x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots\right). \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при x^n , мы найдемъ, умноживъ всѣ члены на $1 \cdot 2 \dots 2n$ и вводя обозначеніе биноміальнаго коэффициента

$$(m)_p = \frac{m!}{p!(m-p)!}, \quad \frac{m(m-1) \dots (m-p+1)}{1 \cdot 2 \dots p} = (m)_p,$$

слѣдующее соотношеніе между Б. числами:

$$\begin{aligned} & B_{2n}(2^{2n} - 1) + (2n)_2 B_{2n-2}(2^{2n-2} - 1) + (2n)_4 B_{2n-4}(2^{2n-4} - 1) + \dots \\ & \dots + (2n)_{2n-2} B_2(2 - 1) - \frac{1}{2} = 0; \end{aligned}$$

сравнивая же коэффициенты при x^{2n+1} , получимъ:

$$(2n+1)B_{2n}(2^{2n-1}-1) + (2n+1)B_{2n-2}(2^{2n-3}-1) + \dots$$

$$\dots + (2n+1)B_2(2-1) - \frac{1}{2} = 0.$$

2.

$$\frac{x}{e^x-1} (e^{2x}-1) = x(e^x+1)$$

т.-е.

$$\left(1 + B_1 x + B_2 \frac{x^2}{1.2} + \dots\right) \left(2 + \frac{2^2 x}{1.2} + \frac{2^3 x^2}{1.2.3} + \dots\right) =$$

$$= 2 + x + \frac{x^2}{1.2} + \dots$$

Сравнивая здѣсь коэффициенты при x^{2n} , получимъ:

$$(2n+1)2B_{2n} + (2n+1)2^2 B_{2n-2} + \dots + (2n+1)B_2 2^{2n-1} +$$

$$+ (2n+1)2^{2n} B_1 + 2^{2n+1} - (2n+1) = 0,$$

сравненіе же коэффициентовъ при x^{2n+1} дасть:

$$(2n+2)2^2 B_{2n} + (2n+2)2^4 B_{2n-2} + \dots + (2n+2)B_2 2^{2n} +$$

$$+ (2n+2)2^{2n+1} B_1 + 2^{2n+2} - (2n+2) = 0.$$

3. Изъ тождества:

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{x}{e^x - 1} = \frac{e^{2x} - 1}{2} \cdot \frac{x}{e^x - 1}$$

имѣемъ:

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot F(-x) = \frac{e^{2x} - 1}{2} \cdot F(x),$$

или:

$$\left(1 + \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4.5} + \dots\right) \left(1 - B_1 x + B_2 \frac{x^2}{1.2} + \dots\right) =$$

$$+ B_4 \frac{x^4}{1.2.3.4} + \dots =$$

$$\left(1 + \frac{2x}{1.2} + \frac{2^2 x^2}{1.2.3} + \frac{2^3 x^3}{1.2.3.4} + \dots\right) \left(1 + B_1 x + B_2 \frac{x^2}{1.2} + \dots\right) + B_4 \frac{x^4}{1.2.3.4} + \dots$$

Сравненіе коэффиціентовъ при x^{2n+1} даетъ:

$$(2n+2)(2n+1)B_{2n} + (2n+2)_4 2^3 B_{2n-2} + (2n+2)_6 2^5 B_{2n-4} + \dots \\ \dots + (2n+2)(2^{2n}+1)B_1 + 2^{2n+1} = 0,$$

сравнивая же коэффиціенты при x^{2n+2} , имѣемъ:

$$(2n+3)_3 B_{2n}(2^2-1) + (2n+3)_5 B_{2n-2}(2^4-1) + \dots \\ + (2n+3)_{2n+1} B_2(2^{2n}-1) + (2n+3)_{2n+2} B_1 \cdot 2^{2n+1} + (2^{2n+2}-1) = 0.$$

Подвергая функцію $F(x)$ другимъ видоизмѣненіямъ и комбинируя полученные результаты между собой, Мейеръ нашолъ иныя соотношенія подобнаго рода, а также вновь получилъ этимъ способомъ извѣстныя соотношенія Эйлера (2-го порядка) и Моавра. Послѣднія весьма просто получаются изъ тождества:

$$F(-x) = e^x \cdot F(x),$$

если разложимъ входящія сюда функціи въ ряды и сравнимъ коэффиціенты при x^{2n+1} и x^{2n} , именно, найдемъ:

$$(2n+1)_1 B_{2n} + (2n+1)_3 B_{2n-2} + \dots \\ \dots + (2n+1)_{2n-1} B_2 + (2n+1)_{2n} B_1 + 1 = 0$$

и

$$(2n)_2 B_{2n-2} + (2n)_4 B_{2n-4} + \dots \\ \dots + (2n)_{2n-2} B_2 + (2n)_{2n-1} B_1 + 1 = 0.$$

§ 11. Соотношенія, получаемыя изъ разложеній въ ряды тригонометрическихъ функцій.

Формулы, подобныя соотношеніямъ Мейера, могутъ быть выведены еще при помощи разложеній въ ряды функцій $ctg\theta$, $tg\theta$, $cosec\theta$, которыя мы имѣли въ § 4, комбинируя эти разложенія съ извѣстными рядами для $\sin\theta$ и $\cos\theta$.

Такъ, изъ тождества:

$$ctg\theta \cdot \sin\theta = \cos\theta$$

имѣемъ:

$$\left(\frac{1}{\theta} - B_2 \frac{2^2\theta}{1.2} + B_4 \frac{2^4\theta^3}{1.2.3.4} - \dots \right) \left(\frac{\theta}{1} - \frac{\theta^3}{1.2.3} + \frac{\theta^5}{1.2\dots5} - \dots \right) = \\ = 1 - \frac{\theta^2}{1.2} + \frac{\theta^4}{1.2.3.4} - \dots$$

Сравнивая здѣсь коэффициенты при θ^{2n} , находимъ:

$$(2n+1)2^{2n}B_{2n} + (2n+1)_2 2^{2n-2}B_{2n-2} + \dots \\ \dots + (2n+1)_{2n-1} 2^2 B_2 - 2n = 0. \quad (1)$$

Точно также, изъ тождества:

$$\operatorname{tg} \theta \cdot \cos \theta = \sin \theta$$

или

$$\left[\frac{2^2(2^2-1)}{1.2} B_2 \theta - \frac{2^4(2^4-1)}{1.2.3.4} B_4 \theta^3 + \dots \right] \cdot \left(1 - \frac{\theta^2}{1.2} + \frac{\theta^4}{1.2.3.4} - \dots \right) = \\ = \frac{\theta}{1} - \frac{\theta^3}{1.2.3} + \frac{\theta^5}{1.2.3.4.5} - \dots$$

получимъ, сравнивая члены съ θ^{2n-1} :

$$B_{2n} 2^{2n} (2^{2n}-1) + (2n)_2 2^{2n-2} (2^{2n-2}-1) B_{2n-2} + \dots \\ \dots + (2n)_{2n-1} 2^2 (2^2-1) B_2 - 2n = 0. \quad (2)$$

Подобнымъ-же образомъ, изъ тождества:

$$\operatorname{ctg} \theta \cdot \cos \theta = \operatorname{cosec} \theta - \sin \theta$$

или

$$\left(\frac{1}{\theta} - B_2 \frac{2^2 \theta}{1.2} + B_4 \frac{2^4 \theta^3}{1.2.3.4} - \dots \right) \left(1 - \frac{\theta^2}{1.2} + \frac{\theta^4}{1.2.3.4} - \dots \right) = \\ = \frac{1}{\theta} + \frac{2(2-1)}{1.2} B_2 \theta - \frac{2(2^3-1)}{1.2.3.4} B_4 \theta^3 + \dots \\ - \left(\frac{\theta}{1} - \frac{\theta^3}{1.2.3} + \frac{\theta^5}{1.2.3.4.5} - \dots \right)$$

имѣемъ, чрезъ сравненіе коэффициентовъ при θ^{2n-1} , соотношеніе:

$$(2^{2n+1}-2)B_{2n} + (2n)_2 2^{2n-2} B_{2n-2} + (2n)_4 2^{2n-4} B_{2n-4} + \dots \\ \dots + (2n)_{2n-1} 2^2 B_2 - 2n = 0 \quad (3)$$

и такъ далѣе.

§ 12. Формулы Штерна.

Соотношенія, выведенныя нами до сихъ поръ, представляютъ при вычисленіи Бернуллиевыхъ чиселъ то неудобство, что даютъ

выраженіе опредѣляемаго B -числа въ функціи всѣхъ предше-
ствующихъ ему чиселъ. Однако Зейдель и затѣмъ Штернъ пока-
зали (Abh. der k. Gesellsch. zu Göttingen, 23, 26), что существу-
ютъ и такія соотношенія, пользуясь которыми мы можемъ вычи-
слить B -число, зная только часть предшествующихъ ему чиселъ,
не меньшую, впрочемъ, половины всего ихъ числа. Формулы
Штерна, содержащія, какъ частный случай и соотношенія Зейделя,
основаны на изслѣдованіи разложения:

$$F(x) = \frac{x}{e^x - 1} = 1 + B_1 x + B_2 \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \dots + B_n \frac{x^n}{1 \cdot 2 \dots n} + \dots$$

Отсюда, по теоремѣ Маклорена;

$$F(0)=1; F'(0)=B_1 = -\frac{1}{2}, \dots F^{(n)}(0)=B_n,$$

следовательно, при n нечетномъ, $F^{(n)}(0)=0$.

Понимая B -число, какъ функцію, которая имѣетъ опредѣленное
значеніе при каждомъ цѣломъ значеніи его указателя, замѣчаемъ,
что всегда имѣютъ конечную величину разности:

$$\Delta F^{(n)}(0) = F^{(n+1)}(0) - F^{(n)}(0); \Delta^2 F^{(n)}(0), \dots \Delta^m F^{(n)}(0) \dots$$

и такъ какъ по теоріи кон. разностей:

$$\Delta^m u_n = u_{m+n} - (m)_1 u_{m+n-1} + (m)_2 u_{m+n-2} - \dots + (-1)^m u_n \quad (\alpha)$$

и

$$\Delta^m u_n = \Delta^{m+n} u - (n)_1 \Delta^{m+n-1} u + (n)_2 \Delta^{m+n-2} u - \dots + \Delta u; \quad (\beta)$$

то имѣемъ:

$$\begin{aligned} \Delta^m F^{(n)}(0) &= F^{(m+n)}(0) - (m)_1 F^{(m+n-1)}(0) + (m)_2 F^{(m+n-2)}(0) - \dots \\ &\dots + (-1)^m F^{(n)}(0) \end{aligned} \quad (A)$$

$$\begin{aligned} \Delta^m F^{(n)}(0) &= \Delta^{m+n} F(0) + (n)_1 \Delta^{m+n-1} F(0) + (n)_2 \Delta^{m+n-2} F(0) + \dots \\ &\dots + \Delta^m F(0) \end{aligned} \quad (B)$$

Здѣсь формула (A) даетъ выраженіе разности $\Delta^m F^{(n)}(0)$ чрезъ
 B -числа отъ B_{m+n} до B_n включительно, а формула (B) чрезъ
разности высшихъ порядковъ отъ $F(0)$. Однако Штернъ показалъ,
что эти разности также можно весьма просто выразить чрезъ B -
числа. Именно, примѣнимъ къ $F(0)$ формулу (α); найдемъ:

$$(\alpha)_p = \frac{m!}{(m-p)! p!} = \sum_{p+1}$$

$$\Delta^m F(0) = F^{(m)}(0) - (m)_1 F^{(m-1)}(0) + (m)_2 F^{(m-2)}(0) - \dots + (-1)^m F(0)$$

или отдѣльно для разности четнаго и нечетнаго порядка:

$$\begin{aligned} \Delta^{2m} F(0) &= F^{(2m)}(0) + (2m)_2 F^{(2m-2)}(0) + \dots \\ &\dots + (2m)_{2m-2} F^{(2)}(0) + m + 1 \end{aligned} \quad (a)$$

$$\begin{aligned} \Delta^{2m+1} F(0) &= -(2m+1)_1 F^{(2m)}(0) - (2m+1)_3 F^{(2m-2)}(0) - \dots \\ &\dots - \frac{2m+1}{2} - 1 \end{aligned} \quad (b)$$

Формулы (a) и (b) могутъ быть упрощены на основаніи соотвѣствующихъ соотношеній Моавра:

$$(2m)_2 B_{2m-2} + (2m)_4 B_{2m-4} + \dots + (2m)_{2m-2} B_2 + (2m)_{2m-1} B_1 + 1 = 0 \quad (a')$$

$$\begin{aligned} &(2m+1)_1 B_{2m} + (2m+1)_3 B_{2m-2} + \dots \\ &\dots + (2m+1)_{2m-1} B_2 + (2m+1)_{2m} B_1 + 1 = 0 \end{aligned} \quad (b')$$

Именно, вычитая (a') изъ (a) и складывая (b') съ (b), находимъ:

$$\Delta^{2m} F(0) = F^{(2m)}(0) + 2m$$

$$\Delta^{2m+1} F(0) = -(2m+1)$$

или вообще:

$$\Delta^k F(0) = F^{(k)}(0) + (-1)^k \cdot k.$$

Такимъ образомъ, формула (B) даетъ выраженіе $\Delta^m F^{(n)}(0)$ чрезъ Б. числа отъ B_{m+n} до B_m включительно. Дѣлая различныя предположенія относительно m и n и сопоставляя оба выраженія для $\Delta^m F^{(n)}(0)$, мы и получимъ рядъ соотношеній между числами отъ B_{m+n} до B_m включительно.

Очевидно, возможны 4 различныхъ случая:

1. m и n числа четныя; $n > m$; тогда формула (B) даетъ:

$$\begin{aligned} \Delta^m F^{(n)}(0) &= (m+n) - (n)_1 (m+n-1) + \dots \\ &+ (n)_{n-2} (m-2) + (n)_{n-1} (m+1) + (n)_n m \\ &+ F^{(m+n)}(0) + \dots + (n)_{n-2} F^{(m+2)}(0) + \dots + (n)_n F^{(m)}(0) \end{aligned}$$

или, такъ какъ здѣсь верхній рядъ, соотвѣствуя $\Delta^n(m')$ равенъ 0, то

$$\Delta^m F^{(n)}(0) = F^{(m+n)}(0) + (n)_1 F^{(m+n-1)}(0) + \dots + (n)_n F^{(m)}(0).$$

Съ другой стороны, по формулѣ (A) имѣемъ:

$$\Delta^m F^{(n)}(0) = F^{(m+n)}(0) + (m)_1 F^{(m+n-1)}(0) + \dots + (m)_m F^{(n)}(0)$$

Вычитая последнее уравненіе изъ предыдущаго и вводя Бернуллиевы числа, имѣемъ:

$$[(n)_1 - (m)_1] B_{m+n-1} + [(n)_2 - (m)_2] B_{m+n-2} + \dots + [(n)_m - (m)_m] B_n + \\ + (n)_{m+1} B_{n-1} + (n)_{m+2} B_{n-2} + \dots + (n)_n B_m = 0 \dots \quad (I)$$

2. m четное, n нечетное; тогда, по (A) и (B) найдемъ:

$$-(m)_1 F^{(m+n-1)}(0) - (m)_3 F^{(m+n-3)}(0) - \dots - (m)_{m-1} F^{(n+1)}(0) = \\ = (n)_1 F^{(m+n-1)}(0) + (n)_3 F^{(m+n-3)}(0) + \dots \\ + (n)_{n-2} F^{(m+2)}(0) + (n)_n F^{(m)}(0)$$

откуда слѣдуетъ соотношеніе:

$$[(n)_1 + (m)_1] B_{m+n-1} + [(n)_3 + (m)_3] B_{m+n-3} + \dots \\ \dots + [(n)_{m-1} + (m)_{m-1}] B_{n+1} + \\ + (n)_{m+1} B_{n-1} + \dots + (n)_n B_m = 0 \quad (II)$$

3. m нечетное, n четное. Тогда по формулѣ (A):

$$\Delta^m F^{(n)}(0) = -(m)_1 F^{(m+n-1)}(0) - (m)_3 F^{(m+n-3)}(0) - \dots - (m)_m F^{(n)}(0)$$

а по формулѣ (B):

$$\Delta^m F^{(n)}(0) = -(m+n) + (n)_1(m+n-1) - (n)_2(m+n-2) + \dots \\ \dots + (n)_{n-1}(m+1) - (n)_n m + \\ + (n)_1 F^{(m+n-1)}(0) + \dots + (n)_{n-1} F^{(m+1)}(0)$$

Но верхняя строка здѣсь представляетъ $-\Delta^n(m^1)$, т. е. 0, и потому:

$$\Delta^m F^{(n)}(0) = (n)_1 F^{(m+n-1)}(0) + (n)_3 F^{(m+n-3)}(0) + \dots \\ \dots + (n)_{n-1} F^{(m+1)}(0).$$

Полагая $n > m$, найдемъ чрезъ вычитаніе:

$$[(n)_1 + (m)_1]B_{m+n-1} + [(n)_2 + (m)_2]B_{m+n-2} + \dots + [(n)_m + (m)_m]B_n + \\ + (n)_{m+1}B_{n-1} + \dots + (n)_{n-1}B_{m+1} = 0 \quad (\text{III})$$

4. m и n числа нечетныя, тогда по (A) и (B) найдемъ:

$$\Delta^m F^{(n)}(0) = F^{(m+n)}(0) + (m)_2 F^{(m+n-2)}(0) + (m)_4 F^{(m+n-4)}(0) + \dots \\ + (m)_{m-1} F^{(n+1)}(0) \\ \Delta^n F^{(n)}(0) = F^{(m+n)}(0) + (n)_2 F^{(m+n-2)}(0) + (n)_4 F^{(m+n-4)}(0) + \dots \\ + (n)_{n-1} F^{(m+1)}(0)$$

откуда, при $n > m$, имѣемъ:

$$[(n)_2 - (m)_2]B_{m+n-2} + [(n)_4 - (m)_4]B_{m+n-4} + \dots \\ + [(n)_{m-1} - (m)_{m-1}]B_{n+1} + \\ + \dots + (n)_{n-1}B_{m+1} = 0. \quad (\text{IV})$$

Чтобы освободиться отъ ограниченій, наложенныхъ на числа m и n и получить соотношенія, которыя во всѣхъ 4 случаяхъ содержали бы одни и тѣ же Б. числа, положимъ въ соотношеніи (I):

$$m = 2k; \quad n = 2k + 2(r+1), \quad m + n = 2(2k + r + 1)$$

гдѣ k и r произвольныя цѣлыя числа, получимъ:

$$[(n)_2 - (m)_2]B_{2(2k+r)-1} + [(n)_4 - (m)_4]B_{2(2k+r)-2} + \dots + B_{2k} = 0 \quad (1)$$

Въ формулѣ (II) положимъ $m = 2k$, $n = 2k + 2r + 1$, тогда

$$[(n)_1 + (m)_1]B_{2(2k+r)} + [(n)_3 + (m)_3]B_{2(2k+r)-2} + \\ + \dots + (n)_{n-1}B_{2k} = 0 \quad (2)$$

Въ (III) положимъ $m = 2k - 1$, $n = 2k + 2r + 2$, получимъ:

$$[(n)_1 + (m)_1]B_{2(2k+r)-1} + [(n)_3 + (m)_3]B_{2(2k+r)-3} + \\ + \dots + (n)_{n-1}B_{2k} = 0 \quad (3)$$

Наконецъ, въ (IV) полагаемъ: $m = 2k - 1$, $n = 2k + 2r - 3$; найдемъ соотношеніе:

$$[(n)_2 - (m)_2] B_{2(2k+r)} + [(n)_4 - (m)_4] B_{2(2k+r)-2} + \dots + (n)_{n-1} B_{2k} = 0. \quad (4)$$

Всѣ полученныя соотношенія даютъ, такимъ образомъ, возможность вычислить $B_{2(2k+r)}$, зная числа, ему предшествующія до B_{2k} включительно. Такъ, полагая $k=3$, $r=2$, мы найдемъ такія соотношенія между числами отъ B_{16} до B_6 :

Въ 1-мъ случаѣ $m=6$, $n=12$, и имѣемъ:

$$51B_{16} + 480B_{14} + 923B_{12} + 495B_{10} + 66B_8 + B_6 = 0.$$

Во 2-мъ случаѣ $m=6$, $n=11$, и слѣдовательно:

$$17B_{16} + 185B_{14} + 468B_{12} + 330B_{10} + 55B_8 + B_6 = 0.$$

Въ 3-мъ случаѣ $m=5$, $n=12$, такъ что найдемъ:

$$17B_{16} + 230B_{14} + 793B_{12} + 792B_{10} + 220B_8 + 12B_6 = 0.$$

Наконецъ, въ 4-мъ случаѣ $m=5$, $n=13$, и потому:

$$68B_{16} + 710B_{14} + 1716B_{12} + 1287B_{10} + 286B_8 + 13B_6 = 0.$$

Полагая въ формулахъ (1) — (4) $r=0$, мы получаемъ соотношенія, въ которыя входятъ Б. числа отъ B_{4k} до B_{2k} включительно. Такимъ образомъ, отрицательное Б. число B_{4k} , т.-е. $(2k+1)$ -е считая отъ B_1 , мы можемъ вычислить по значеніямъ k предшествующихъ ему чиселъ. Формулы (1) и (2), при $r=0$, приводятъ къ одному и тому же соотношенію:

$$(4k+1)B_{4k} + (4k-1) \frac{2k(2k-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} B_{4k-2} + \dots + B_{2k} = 0.$$

$+ (2k+1) B_{2k+2}$

Это и есть вышеупомянутая формула Зейдля.

Подстановка $r=0$ въ (3) и (4) даетъ еще двѣ формулы, аналогичныхъ формулѣ Зейдля. Кромѣ того, въ (3) и (4) можемъ еще положить $r=-1$, ибо и при этомъ допущеніи $n > m$. Получимъ, однако, въ обоихъ случаяхъ одно и то же соотношеніе:

$$(4k-1)B_{4k-2} + (4k-3) \frac{(2k-1)(2k-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} B_{4k-4} + \dots + (2k+1)B_{2k} = 0,$$

$+ (2k+1) B_{2k+2}$

такимъ образомъ, положительное Б. число B_{4k-2} , т. е. $(2k)$ -е, счи-

тая отъ B_1 , можно вычислить по этой формулѣ въ функціи лишь $(k-1)$ предшествующихъ ему чиселъ.

Во всѣхъ разобранныхъ случаяхъ мы считаемъ $k > 1$. Полагая $k=1$, мы находимъ изъ формулъ (1)—(4) соотношенія между числами отъ $B_2(r+2)$ до B_2 , не содержащія членовъ, свободныхъ отъ B . чиселъ.

Кромѣ приведенныхъ формулъ, Штернъ, пользуясь тѣми же приемами, получилъ значительное число и другихъ соотношеній между B . числами. Всѣхъ ихъ приводить, однако, нѣтъ надобности, такъ какъ существуютъ формулы общаго характера, позволяющія получать соотношенія между B . числами любого вида и въ произвольномъ количествѣ; мы ихъ выведемъ въ V-й главѣ.

§ 13. Формула А. Геносси.

Формула Лапласа (§ 9) долгое время оставалась единственнымъ извѣстнымъ независимымъ раціональнымъ выраженіемъ B . числа. Новое выраженіе подобнаго рода, болѣе общее и заключающее въ себѣ ф. Лапласа какъ частный случай, было дано въ 1852 г. италіанскимъ математикомъ А. Геносси, который вообще много занимался числами Я. Бернулли. Онъ воспользовался при этомъ разложеніемъ въ рядъ той-же функціи, которая послужила и Лапласу для вывода независимаго выраженія B . числа; именно:

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{2} - B_2 \frac{(2^2 - 1)}{1 \cdot 2} x - B_4 \frac{(2^4 - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^3 - \\ \dots - B_{2n} \frac{(2^{2n} - 1)}{1 \cdot 2 \dots 2n} x^{2n-1} - \dots$$

т. е. $B_{2n} \frac{(2^{2n} - 1)}{2n!}$ опредѣляется какъ коэффициентъ при x^{2n-1} въ разложеніи функціи $\frac{1}{e^x - 1}$. А. Дженокки показалъ, однако, что,

въ цѣляхъ общности, удобнѣе, вмѣсто прямого выраженія этого коэффициента, употребить косвенный приемъ, именно, вычислить коэффициентъ при x^{2n-1} въ разложеніи болѣе общей функціи

$\frac{1}{ae^x - 1}$ и въ полученномъ выраженіи положить $a = -1$, ибо тогда

эта функція переходитъ въ $-\frac{1}{e^x + 1}$.

Пусть $2n-1$ меньше некоторого цѣлаго числа m , тогда представляя нашу функцію въ видѣ:

$$\frac{1}{ae^x-1} = \frac{1}{a-1-a(1-e^x)} = \frac{1}{a-1} + \frac{a}{(a-1)^2} (1-e^x) + \frac{a^2}{(a-1)^3} (1-e^x)^2 + \dots \quad (1)$$

и имѣя въ виду, что

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \dots$$

заключаемъ, что x^{2n-1} войдетъ лишь въ тѣ члены разлжженія (1), въ которыхъ показатель количества $(1-e^x)$ меньше m , такъ какъ $(1-e^x)^m$ не можетъ содержать x въ меньшей степени, чѣмъ x^m . Поэтому, мы должны рассмотреть только сумму членовъ:

$$\frac{1}{a-1} + \frac{a}{(a-1)^2} (1-e^x) + \dots + \frac{a^{m-1}}{(a-1)^m} (1-e^x)^{m-1},$$

что, суммируя, можно еще представить въ видѣ:

$$\frac{\frac{a^{m-1}(1-e^x)^{m-1}}{(a-1)^m} \cdot \frac{a(1-e^x)}{(a-1)} - \frac{1}{a-1}}{\frac{a}{a-1}(1-e^x)-1} = \frac{1}{(a-1)^m} \cdot \frac{(a-1)^m - a^m(1-e^x)^m}{ae^x-1}.$$

Но, развертывая числитель этого выраженія по формулѣ бинорма, находимъ:

$$\begin{aligned} & a^m - (m)_1 a^{m-1} + (m)_2 a^{m-2} - \dots + (-1)^m - [a^m - (m)_1 a^m e^x + \\ & + (m)_2 a^m e^{2x} - \dots + (-1)^m a^m e^{mx}] = \\ & = (m)_1 a^{m-1} (ae^x - 1) - (m)_2 a^{m-2} (a^2 e^{2x} - 1) + (m)_3 a^{m-3} (a^3 e^{3x} - 1) - \dots \\ & \dots + (-1)^{m-1} (a^m e^{mx} - 1). \end{aligned}$$

Такъ какъ, далѣе,

$$\frac{a^k e^{kx} - 1}{ae^x - 1} = a^{k-1} e^{(k-1)x} + a^{k-2} e^{(k-2)x} + \dots + ae^x + 1,$$

то сумма рассматриваемыхъ членовъ приметъ видъ:

$$\begin{aligned} (m)_1 &= m \\ (m)_2 &= \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \\ &\quad \frac{1 \cdot 2 \cdot (m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{(a-1)^m} \left\{ (m)_1 a^{m-1} - (m)_2 a^{m-2} (ae^x + 1) + (m)_3 (a^2 e^{2x} + ae^x + 1) + \dots \right. \\ \left. \dots + (m)_m [a^{m-1} e^{(m-1)x} + a^{m-2} e^{(m-2)x} + \dots + ae^x + 1] \right\}$$

Замѣчая, что въ разложеніи e^{px} коэффициентъ при x^{2n-1} есть $\frac{p^{2n-1}}{(2n-1)!}$, находимъ, что въ рассматриваемой суммѣ коэффициентъ при x^{2n-1} будетъ имѣть такое выраженіе:

$$\frac{1}{1.2 \dots (2n-1)} \cdot \frac{a}{(a-1)^m} \left\{ -(m)_2 a^{m-2} + (m)_3 a^{m-3} (2^{2n-1} a + 1) - \right. \\ \left. - (m)_4 a^{m-4} (3^{2n-1} a^2 + 2^{2n-1} a + 1) + \dots \right. \\ \left. \dots + (m)_m (-1)^{m-1} [(m-1)^{2n-1} a^{m-1} + (m-2)^{2n-1} a^{m-2} + \dots + 1] \right\}$$

Полагая здѣсь $a = -1$, находимъ:

$$B_{2n} \frac{(2^{2n-1})!}{1.2 \dots 2n} = \frac{1}{1.2 \dots (2n-1)} \cdot \frac{1}{2^m} \left\{ (m)_2 - (m)_3 (2^{2n-1} - 1) + \right. \\ \left. + (m)_4 (3^{2n-1} - 2^{2n-1} + 1) - \dots \right. \\ \left. \dots + (m)_m (-1)^m [(m-1)^{2n-1} - (m-2)^{2n-1} + \dots + (-1)^m] \right\}$$

Отсюда найдемъ:

$$B_{2n} = \frac{2n}{2^{2n-1}} \cdot \frac{1}{2^m} \left\{ (m)_2 - (m)_3 (2^{2n-1} - 1) + (m)_4 (3^{2n-1} - 2^{2n-1} + 1) - \dots \right. \\ \left. + (-1)^m [(m-1)^{2n-1} - (m-2)^{2n-1} + (m-3)^{2n-1} - \dots + (-1)^m] \right\}$$

— формула Дженочки. Весьма замѣчательную ея особенность составляетъ, какъ видимъ, то, что въ нее кромѣ функцій отъ $2n$, входитъ еще произвольное цѣлое число m , подчиненное одному только условію: $m > (2n-1)$. Поэтому, давая m различныя значенія, получимъ сколько угодно независимыхъ выраженій для одного и того же Бернуллиева числа B_{2n} .

Наименьшее значеніе, которое въ выведенной формулѣ можно дать числу m , есть $2n$; тогда она приметъ видъ:

$$B_{2n} = \frac{2n}{2^{2n-1}} \cdot \frac{1}{2^{2n}} \left\{ 2^{2n} \left(1 + 2^{2n-1} + 3^{2n-1} + \dots + (m-1)^{2n-1} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{(m+1)!} 2^{2n-1} + \frac{1}{(m+1)!} 2^{2n-1} + \frac{1}{(m+1)!} 3^{2n-1} + \dots + \frac{1}{(m+1)!} (m-1)^{2n-1} \right\}$$

$$B_{2n} = \frac{2n}{(2^{2n}-1)2^{2n}} \left\{ (2n)_2 - (2n)_3 (2^{2n-1}-1) + \right. \\ \left. + (2n)_4 (3^{2n-1}-2^{2n-1}+1) - \dots \right. \\ \left. \dots - (2n)_{2n-1} [(2n-2)^{2n-1} - (2n-3)^{2n-1} + (2n-4)^{2n-1} - \dots - 1] + \right. \\ \left. + [(2n-1)^{2n-1} - (2n-2)^{2n-1} + (2n-3)^{2n-1} - \dots + 1] \right\}.$$

Легко убѣдиться, что это выраженіе тождественно съ формулой Лапласа. Для этого представимъ его въ видѣ:

$$B_{2n} = \frac{2n}{(2^{2n}-1)2^{2n}} \left\{ (2n)_2 - (2n)_3 \cdot 2^{2n-1} + (2n)_4 \cdot 3^{2n-1} - \dots \right. \\ \left. \dots - (2n)_{2n-1} [(2n-2)^{2n-1} + (2n-1)^{2n-1}] + [(2n)_3 - (2n)_4 \cdot 2^{2n-1} + \dots \right. \\ \left. \dots + (2n)_{2n-1} [(2n-3)^{2n-1} - (2n-2)^{2n-1}] + [(2n)_4 - \dots \right. \\ \left. \dots - (2n)_{2n-1} [(2n-4)^{2n-1} + (2n-3)^{2n-1}] + \dots \right\}$$

Принимая теперь во вниманіе формулы (А) § 9 замѣчаемъ, что то же выраженіе можно представить такъ:

$$B_{2n} = \frac{2n}{(2^{2n}-1)2^{2n}} \left\{ 1 - (2^{2n-1} - 2n) + [3^{2n-1} - (2n)_4 \cdot 2^{2n-1} + \right. \\ \left. + (2n)_2] - \dots \right\},$$

а это и есть формула Лапласа въ томъ видѣ, какъ мы ее имѣли до преобразованія.

Формула Дженочки обнаруживаетъ важныя числовыя свойства Б. чиселъ, какъ это увидимъ въ VI-й главѣ.

§ 14. Формулы Кронекера.

Два независимыхъ выраженія для Бернулліева числа еще болѣе общаго характера, чѣмъ формула Дженочки, и весьма замѣчательныхъ по своему составу были получены Л. Кронекеромъ (J. de Liouville, II s. 1), который основывался при этомъ на изслѣдованіи разложеній двухъ функцій болѣе сложнаго вида, чѣмъ тѣ, которыя мы имѣли до сихъ поръ.

Первая изъ этихъ функцій есть:

$$V(x) = (e^{ax} + e^{-ax})(e^{bx} + e^{-bx})(e^{cx} + e^{-cx}) \dots \quad (1)$$

Пусть число всѣхъ членовъ въ этомъ произведеніи будетъ n , соотвѣтственно n количествамъ $a, b, c \dots$. Для умноженія, найдемъ:

$$V(x) = \sum e^{(\pm a \pm b \pm c \dots)x}$$

причемъ, очевидно, суммирование распространяется на всевозможныя комбинаціи знаковъ $+$ и $-$ въ показателѣ. Разлагая же вторую часть того же выраженія въ рядъ, мы получимъ:

$$V(x) = 2^n + P_1 x + P_2 \frac{x^2}{1 \cdot 2} + P_3 \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

гдѣ чрезъ P_k мы для краткости означаемъ симметрическую функцію

$$(a + b + c + \dots)^k + (-a + b + c + \dots)^k + \dots$$

получающуюся отъ того, что мы беремъ всевозможныя комбинаціи знаковъ $+$ и $-$ при $a, b, c \dots$. Очевидно, однако, что такія симметрическія функціи при нечетномъ k обращаются въ 0, такъ что получимъ:

$$V(x) = 2^n + P_2 \frac{x^2}{1 \cdot 2} + P_4 \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots = 2^n + \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{P_{2k}}{1 \cdot 2 \dots 2k} x^{2k} \quad (2)$$

Съ другой стороны, если продифференцируемъ логарифмъ произведенія (1), имѣемъ:

$$\frac{V'(x)}{V(x)} = a \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{ax} + e^{-ax}} + b \frac{e^{bx} - e^{-bx}}{e^{bx} + e^{-bx}} + c \frac{e^{cx} - e^{-cx}}{e^{cx} + e^{-cx}} + \dots$$

или, разлагая каждый членъ полученной суммы въ рядъ:

$$\frac{V'(x)}{V(x)} = \frac{2^2(2^2-1)}{1 \cdot 2} B_2 S_2 x + \frac{2^4(2^4-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} B_4 S_4 x^3 + \frac{2^6(2^6-1)}{1 \cdot 2 \dots 6} B_6 S_6 x^5 + \dots$$

гдѣ

$$S_l = a^l + b^l + c^l + \dots$$

Отсюда:

$$V'(x) = V(x) \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{1 \cdot 2 \dots 2k} B_{2k} S_{2k} x^{2k-1} \quad (3)$$

Но изъ уравненія (2) имѣемъ:

$$V(x) = 2^n + \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{P_{2k}}{1 \cdot 2 \dots 2k} x^{2k}$$

$$V'(x) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{2k P_{2k}}{1 \cdot 2 \dots 2k} x^{2k-1};$$

подставляя эти значенія, въ (3), имѣемъ:

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{2k \cdot P_{2k}}{1 \cdot 2 \dots 2k} x^{2k-1} = \left(2^n + \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{P_{2k}}{1 \cdot 2 \dots 2k} x^{2k} \right) \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{1 \cdot 2 \dots 2k} B_{2k} S_{2k} x^{2k-1}$$

или

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{2k \cdot P_{2k}}{2^n \cdot 1 \cdot 2 \dots 2k} x^{2k-1} = \left(1 + \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{P_{2k}}{2^n \cdot 1 \cdot 2 \dots 2k} x^{2k} \right) \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{1 \cdot 2 \dots 2k} B_{2k} S_{2k} x^{2k-1},$$

гдѣ всѣ суммы берутся отъ $k=1$ до $k=\infty$.

Положимъ здѣсь для краткости:

$$\frac{P_{2k}}{2^n \cdot 1 \cdot 2 \dots 2k} = p_{2k}; \quad \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{1 \cdot 2 \dots 2k} B_{2k} S_{2k} = -s_{2k}$$

тогда найдемъ:

$$\sum 2k \cdot p_{2k} x^{2k-1} + \sum s_{2k} x^{2k-1} + \sum p_{2k} x^{2k} \sum s_{2k} x^{2k-1} = 0.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при x^{2m-1} въ этомъ выраженіи, причемъ m число произвольное, находимъ:

$$s_{2m} + s_{2m-2} p_2 + s_{2m-4} p_4 + \dots + s_2 p_{2m-2} + 2m \cdot p_{2m} = 0.$$

Сравнивая это выражение съ известными формулами Ньютона, заключаемъ, что количества s_1, s_2, \dots, s_{2k} соответственно равны суммамъ 2-хъ, 4-хъ... $(2k)$ -хъ степеней корней уравненія:

$$s^{2m} + p_1 s^{2m-2} + p_2 s^{2m-4} + \dots + p_{m-1} s^2 + p_m = 0,$$

или, если замѣнимъ коэффициенты p ихъ значеніями,

$$s^{2m} + \frac{P_1}{2^n \cdot 1 \cdot 2} s^{2m-2} + \frac{P_2}{2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} s^{2m-4} + \dots \\ + \frac{P_{m-1}}{2^n \cdot 1 \cdot 2 \dots (2m-2)} s^2 + \frac{P_m}{2^n \cdot 1 \cdot 2 \dots 2m} = 0,$$

т.-е.

$$2^n \cdot 1 \cdot 2 \dots 2m \cdot s^{2m} + P_1 \cdot 3 \cdot 4 \dots 2m \cdot s^{2m-2} + \dots \\ \dots + P_{m-1} (2m-1) 2m \cdot s^2 + P_m = 0 \quad (4)$$

Итакъ, если назовемъ корни этого уравненія $\alpha, \beta, \gamma \dots$ то имѣемъ при $\mu \leq m$:

$$\alpha^{2\mu} + \beta^{2\mu} + \gamma^{2\mu} + \dots = s_{2\mu} = - \frac{2^{2\mu} (2^{2\mu} - 1)}{1 \cdot 2 \dots 2\mu} B_{2\mu} S_{2\mu},$$

или

$$\alpha^{2\mu} + \beta^{2\mu} + \gamma^{2\mu} + \dots = - \frac{2^{2\mu} (2^{2\mu} - 1)}{1 \cdot 2 \dots 2\mu} B_{2\mu} (\alpha^{2\mu} + \beta^{2\mu} + \gamma^{2\mu} + \dots)$$

Отсюда выраженіе Бернуллиева числа:

$$B_{2\mu} = - \frac{1 \cdot 2 \dots 2\mu (\alpha^{2\mu} + \beta^{2\mu} + \dots)}{2^{2\mu} (2^{2\mu} - 1) (\alpha^{2\mu} + \beta^{2\mu} + \dots)} \quad (I)$$

Согласно съ этой формулой, давая совершенно произвольныя значенія количествамъ $a, b, c \dots$ и составляя затѣмъ ур. (4), мы найдемъ значенія всѣхъ Бернуллиевыхъ чиселъ, указатели которыхъ не превышаютъ степени этого уравненія, чрезъ симметрическія функціи, выражающія суммы одинакихъ степеней его корней.

Такъ, чтобы найти B_2, B_4, B_6, B_8 , достаточно при составленіи исходнаго уравненія (4) взять $m=4$; произвольныя же количества въ числѣ $n=3$, пусть будутъ $a=1, b=2, c=3$. Тогда уравненіе получитъ видъ:

$$s^8 + \frac{P_1}{2^8 \cdot 1 \cdot 2} s^7 + \frac{P_2}{2^8 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} s^6 + \frac{P_3}{2^8 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} s^5 + \frac{P_4}{2^8 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} s^4 = 0$$

Въ данномъ случаѣ:

$$P_k = (1+2+3)^k + (1+2-3)^k + (1-2+3)^k + (1-2-3)^k + \\ + (-1-2-3)^k + (-1-2+3)^k + (-1+2-3)^k + (-1+2+3)^k,$$

отсюда найдемъ:

$$P_1 = 112; P_2 = 3136; P_3 = 101632; P_4 = 3490816,$$

и уравненіе, по упрощеніи, приметъ видъ:

$$45s^8 + 315s^7 + 735s^6 + 794s^5 + 487 = 0.$$

Чтобы найти B_2, B_4, B_6, B_8 , мы должны вычислить суммы 2-хъ, 4-хъ, 6-хъ и 8-хъ степеней корней этого уравненія; применяя для этого формулы Ньютона, найдемъ:

$$s_1 = -14, s_2 = \frac{98}{3}, s_3 = -\frac{1588}{15}, s_4 = \frac{16558}{45},$$

Далѣе:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 = 14; 1^6 + 2^6 + 3^6 = 794$$

$$1^4 + 2^4 + 3^4 = 98; 1^8 + 2^8 + 3^8 = 6818.$$

Поэтому, на основаніи выведенной формулы:

$$B_2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 14}{2^2(2^2-1)14} = \frac{1}{6}; B_4 = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{98}{3}}{98 \cdot 2^4(2^4-1)} = -\frac{1}{30};$$

$$B_6 = \frac{1 \cdot 2 \dots 6 \cdot 1588}{15 \cdot 2^6(2^6-1) \cdot 794} = \frac{1}{42}; B_8 = -\frac{1 \cdot 2 \dots 8 \cdot 16558}{2^8(2^8-1) \cdot 6818 \cdot 45} = -\frac{1}{30}.$$

Другое выраженіе B числа, подобное (I), мы найдемъ, разсматривая функцію:

$$W(x) = (e^{ax} - e^{-ax})(e^{bx} - e^{-bx})(e^{cx} - e^{-cx}) \dots \quad (5)$$

гдѣ, по прежнему, число всѣхъ количествъ $a, b, c \dots$ пусть будетъ n . Дѣлая умноженіе, найдемъ:

$$W(x) = e^{(a+b+c+\dots)x} - e^{(-a+b+c+\dots)x} + e^{(-a-b+c+\dots)x} - \dots \\ = \sum \pm e^{x(\pm a \pm b \pm c \dots)}$$

гдѣ знакъ предъ e соответствуетъ произведенію знаковъ въ показателѣ. Разлагая, поэтому, функцію $W(x)$ въ рядъ, мы должны получить:

$$W(x) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{R_k}{1.2 \dots k} x^k, \quad (6)$$

гдѣ R_k означаетъ симметрическую функцію:

$$(a+b+c+\dots)^k - (-a+b+c+\dots)^k + \dots$$

причемъ знакъ, стоящій предъ скобками, всегда представляетъ произведеніе знаковъ внутри скобокъ. Легко, однако, убедиться, что разложеніе $W(x)$ въ рядъ не будетъ содержать степеней x , меньшихъ x^n . Дѣйствительно:

$$W(x) = \left[(1+ax + \frac{a^2x^2}{1.2} + \dots) - (1-ax + \frac{a^2x^2}{1.2} - \dots) \right] \times \\ \times \left[(1+bx + \frac{b^2x^2}{1.2} + \dots) - (1-bx + \frac{b^2x^2}{1.2} - \dots) \right] \\ \dots \dots \dots$$

Отдѣльные множители будутъ здѣсь, очевидно, начинаться членами $2ax, 2bx \dots$ и содержать x лишь въ нечетныхъ степеняхъ. Поэтому, разложеніе $W(x)$ будетъ начинаться членомъ $2^n a b c \dots x^n$ и содержать четныя или нечетныя степени x въ зависимости отъ того, будетъ ли n числомъ четнымъ, или нѣтъ. Итакъ:

$$W(x) = x^n \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{R_{n+2k}}{1.2 \dots (n+2k)} x^{2k} \quad (7)$$

причемъ, какъ мы замѣтили, $R_n = 2^n . 1.2 \dots n . a . b . c \dots$. Если же продифференцируемъ логарифмъ произведенія (5), получимъ:

$$\frac{W'(x)}{W(x)} = a \cdot \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{e^{ax} - e^{-ax}} + b \cdot \frac{e^{bx} + e^{-bx}}{e^{bx} - e^{-bx}} + c \cdot \frac{e^{cx} + e^{-cx}}{e^{cx} - e^{-cx}} + \dots$$

или, разлагая отдельные члены въ ряды:

$$\begin{aligned} \frac{W'(x)}{W(x)} &= \frac{1}{x} + B_1 \frac{2^1 a^1 x}{1 \cdot 2} + B_3 \frac{2^3 a^3 x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \\ &+ \frac{1}{x} + B_1 \frac{2^1 b^1 x}{1 \cdot 2} + B_3 \frac{2^3 b^3 x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$\frac{W'(x)}{W(x)} = \frac{n}{x} + \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{2^{2k} B_{2k}}{1 \cdot 2 \dots 2k} S_{2k} x^{2k-1} \quad (8)$$

Но, какъ слѣдуетъ изъ уравненія (7):

$$\begin{aligned} W(x) &= x^n \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{R_{n+2k}}{1 \cdot 2 \dots (n+2k)} x^{2k} \\ W'(x) &= x^{n-1} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{R_{n+2k}(n+2k)}{1 \cdot 2 \dots (n+2k)} x^{2k} \end{aligned}$$

и потому уравненіе (8) приметъ видъ:

$$\begin{aligned} x^{n-1} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{R_{n+2k}(n+2k)}{1 \cdot 2 \dots (n+2k)} x^{2k} &= n x^{n-1} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{R_{n+2k}}{1 \cdot 2 \dots (n+2k)} x^{2k} + \\ &+ x^n \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{R_{n+2k}}{1 \cdot 2 \dots (n+2k)} x^{2k} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{2^{2k} B_{2k}}{1 \cdot 2 \dots 2k} S_{2k} x^{2k-1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Умножимъ и раздѣлимъ обѣ части уравненія на $\frac{R_n}{1 \cdot 2 \dots n}$ и введемъ обозначенія:

$$\frac{R_{n+2k}}{R_n} \cdot \frac{1.2\dots n}{1.2\dots(n+2k)} = \omega_{2k}; \quad \frac{2^{2k} B_{2k}}{1.2\dots 2k} S_{2k} = -\sigma_{2k},$$

тогда оно преобразуется въ слѣдующее:

$$\begin{aligned} x^{n-1} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{R_n}{1.2\dots n} (n+2k) \omega_{2k} x^{2k} &= n x^{n-1} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{R_n}{1.2\dots n} \omega_{2k} x^{2k} - \\ &- x^n \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{R_n}{1.2\dots n} \omega_{2k} x^{2k} \sum_{k=1}^{k=\infty} \sigma_{2k} x^{2k-1}, \end{aligned}$$

что, послѣ приведенія, даетъ:

$$x^{n-1} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{R_n}{1.2\dots n} 2k \cdot \omega_{2k} x^{2k} = -x^n \cdot \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{R_n}{1.2\dots n} \omega_{2k} x^{2k} \sum_{k=1}^{k=\infty} \sigma_{2k} x^{2k-1}$$

или

$$x^{n-1} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{R_n 2k}{1.2\dots n} \omega_{2k} x^{2k} = -x^n \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{R_n}{1.2\dots n} \omega_{2k} x^{2k} \sum_{k=0}^{k=\infty} \sigma_{2k+2} x^{2k+1}$$

Предполагая, что всѣ количества $a, b, c \dots$ отличны отъ нуля и, слѣдовательно, R_n не равно 0, мы можемъ въ послѣднемъ уравненіи сократить общаго множителя $\frac{x^{n-1} R_n}{1.2\dots n}$, послѣ чего получимъ:

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} 2k \cdot \omega_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{k=\infty} \omega_{2k} x^{2k} \sum_{k=0}^{k=\infty} \sigma_{2k+2} x^{2k+1} = 0;$$

откуда, приравнявая 0 коэффиціентъ при x^{2m} , гдѣ m —любое число, найдемъ:

$$\sigma_{2m} + \sigma_{2m-2} \omega_2 + \sigma_{2m-4} \omega_4 + \dots + \sigma_2 \omega_{2m-2} + 2m \cdot \omega_{2m} = 0.$$

Это соотношеніе, какъ легко видѣть, вполне совпадаетъ съ формулой, выражающей зависимость между коэффиціентами и суммами одинаковыхъ степеней корней уравненія

$$s^{2m} + \omega_1 s^{2m-2} + \omega_2 s^{2m-4} + \dots + \omega_{2m-1} s^2 + \omega_{2m} = 0$$

или, замѣняя функціи ω ихъ значеніями и освобождая отъ знаменателя:

$$\begin{aligned} & (n+1)(n+2)\dots(n+2m)R_n s^{2m} + \\ & + (n+3)(n+4)\dots(n+2m)R_{n+2} s^{2m-2} + \dots \\ & \dots + (n+2m-1)(n+2m)R_{n+2m-2} s^2 + R_{n+2m} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Итакъ, обозначая корни этого уравненія $\alpha, \beta, \gamma \dots$ будемъ имѣть при $\mu \leq m$:

$$\alpha^{2\mu} + \beta^{2\mu} + \gamma^{2\mu} + \dots = r_{2\mu} = - \frac{2^{2\mu} B_{2\mu} (\alpha^{2\mu} + \beta^{2\mu} + \gamma^{2\mu} + \dots)}{1.2 \dots 2\mu}$$

a

$$B_{2\mu} = - \frac{1.2 \dots 2\mu (\alpha^{2\mu} + \beta^{2\mu} + \gamma^{2\mu} + \dots)}{2^{2\mu} (\alpha^{2\mu} + \beta^{2\mu} + \gamma^{2\mu} + \dots)} \quad (II)$$

Итакъ, давая въ ф. (I) и (II) количествамъ $a, b, c \dots$ произвольныя значенія, можемъ получить сколько угодно выраженій для одного и того же Б. числа. Эти выраженія могутъ быть весьма замѣчательны въ томъ случаѣ, когда количества $a, b, c \dots$ подчинены какимъ-либо особымъ условіямъ. Такъ, полагая, что $a, b, c \dots$ суть $2m$ корней двучленнаго уравненія

$$s^{2m} - 1 = 0, \quad (a)$$

замѣчаемъ, что всѣ симметрическія функціи его корней вида, $s_{2\mu} = \alpha^{2\mu} + \beta^{2\mu} + \dots$ обращаются въ 0, кромѣ случая, когда μ есть число кратное m , ибо тогда

$$s_{2km} = s_{2m} = \alpha^{2m} + \beta^{2m} + \dots = 2m.$$

Вслѣдствіе этого, всѣ симметрическія функціи $P_{2\mu}$, входящія въ уравненіе (4), служащее исходнымъ для (I), обращаются въ 0 кромѣ P_{2m} , и уравненіе принимаетъ видъ:

$$s_{2m} + 2m \cdot p_{2m} = 0; \quad \frac{2^{2m}(2^{2m} - 1)}{1.2 \dots 2m} B_{2m} 2m = \frac{2m \cdot P_{2m}}{2^{2m} \cdot 1.2 \dots 2m}$$

откуда

$$B_{2m} = \frac{P_{2m}}{2^{2m}(2^{2m} - 1)} = \frac{1}{2^{2m}(2^{2m} - 1)} \sum (\pm a \pm b \pm \dots)^{2m},$$

гдѣ $a, b \dots$ суть всѣ различные корни уравненія $s^{2m} - 1 = 0$.

Точно также, симметрическія функціи $R_{i,m}$, входящія въ ур. (9), служащее исходнымъ для выраженія (II), обращаются въ 0 кромѣ $R_{i,m}$ и $R_{2,m}$; послѣдняя, какъ мы видѣли, есть:

$$R_{2,m} = 2^{2m} \cdot 1 \cdot 2 \dots 2m \cdot abc \dots$$

но произведеніе корней двучленнаго уравненія (a) есть — 1, поэтому

$$R_{2,m} = -2^{2m} 1 \cdot 2 \dots 2m,$$

и основное уравненіе приметъ видъ:

$$\sigma_{2,m} + 2m \cdot \omega_{2,m} = 0$$

или

$$\frac{-2^{2m} B_{2,m}}{1 \cdot 2 \dots 2m} \cdot 2m + 2m \frac{R_{2,m} \cdot 1 \cdot 2 \dots 2m}{-2^{2m} \cdot 1 \cdot 2 \dots 2m \cdot 1 \cdot 2 \dots 4m} = 0.$$

отсюда

$$B_{2,m} = \frac{1}{2^{2m} (2m+1) \dots 4m} \sum \pm (\pm a \pm b \pm \dots)^{2m}$$

гдѣ $a, b \dots$ суть корни двучленнаго уравненія (a).

§ 15. Представленіе Бернуллиева числа въ формѣ опредѣленнаго интеграла.

Подобно другимъ Эйлеровымъ формуламъ, и данное имъ независимое выраженіе Б. числа

$$B_{2n} = 2 \cdot (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 2 \dots 2n}{(2\pi)^{2n}} \left[1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \dots \right]$$

было подвергаемо различнымъ преобразованіямъ, причемъ было замѣчено, что бесконечный рядъ, входящій въ эту формулу, можетъ быть различно выражаемъ чрезъ опредѣленные интегралы; такимъ образомъ, было найдено нѣсколько выраженій Б. числа въ формѣ опредѣленнаго интеграла.

Чтобы получить ихъ, рассмотримъ предварительно опредѣленный интегралъ:

$$\int_0^1 x^m (lx)^p dx$$

Такъ какъ

$$\int x^m (lx)^p dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \left[(lx)^p - p \frac{(lx)^{p-1}}{m+1} + p(p-1) \frac{(lx)^{p-2}}{(m+1)^2} - \dots \right. \\ \left. + (-1)^p \frac{1 \cdot 2 \dots p}{(m+1)^p} \right] + C$$

то

$$\int_0^1 x^m (lx)^p dx = (-1)^p \frac{1 \cdot 2 \dots p}{(m+1)^{p+1}}.$$

Въ силу этого

$$\int_0^1 \frac{(lx)^{2n-1}}{1-x} dx = \int_0^1 (lx)^{2n-1} (1+x+x^2+\dots) dx = \\ = -1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2n-1) \left[1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \dots \right]$$

и потому

$$B_{2n} = 2 \cdot (-1)^n \frac{2n}{(2\pi)^{2n}} \int_0^1 \frac{(lx)^{2n-1}}{1-x} dx,$$

или

$$B_{2n} = (-1)^n \frac{n}{2^{2n-2} \pi^{2n}} \int_0^1 \frac{(lx)^{2n-1}}{1-x} dx \quad (I)$$

Если замѣнимъ въ этомъ выраженіи x чрезъ e^{-z} , имѣемъ:

$$B_{2n} = (-1)^n \frac{n}{2^{2n-2} \pi^{2n}} \int_0^\infty \frac{z^{2n-1} e^{-z}}{1-e^{-z}} dz = (-1)^{n+1} \frac{n}{2^{2n-2} \pi^{2n}} \int_0^\infty \frac{z^{2n-1} dz}{e^z - 1} \quad (II)$$

Полагая въ последней формулѣ $z=2\pi t$, найдемъ:

$$B_{2n} = (-1)^{n+1} 4n \int_0^\infty \frac{t^{2n-1}}{e^{2\pi t} - 1} dt \quad (III)$$

Это выраженіе было найдено ранѣе всѣхъ другихъ формулъ

подобнаго рода математикомъ Giovanni Plana (Mém. de l'Acad. de Turin, 1820). Представляя его въ видѣ:

$$B_{2n}=(-1)^{n+1}4n\int_0^{\infty}\frac{e^{-2\pi t}t^{2n-1}}{1-e^{-2\pi t}}dt$$

находимъ, интегрируя по частямъ:

$$\int\frac{t^{2n-1}e^{-2\pi t}}{1-e^{-2\pi t}}dt=t^{2n-1}\frac{l(1-e^{-2\pi t})}{2\pi}-\frac{(2n-1)}{2\pi}\int t^{2n-2}l(1-e^{-2\pi t})dt$$

и потому:

$$\int_0^{\infty}\frac{t^{2n-1}e^{-2\pi t}}{1-e^{-2\pi t}}dt=\frac{2n-1}{2\pi}\int_0^{\infty}t^{2n-2}l\left(\frac{1}{1-e^{-2\pi t}}\right)dt$$

и

$$B_{2n}=(-1)^{n+1}\frac{(2n-1)2n}{\pi}\int_0^{\infty}t^{2n-2}l\left(\frac{1}{1-e^{-2\pi t}}\right)dt \quad (\text{IV})$$

Если положимъ здѣсь $t=ax$, то имѣемъ:

$$B_{2n}=(-1)^{n+1}\frac{2n(2n-1)}{\pi}a^{2n-1}\int_0^{\infty}x^{2n-2}l\left(\frac{1}{1-e^{-2\pi ax}}\right)dx. \quad (\text{V})$$

Чтобы получить другой рядъ подобныхъ формулъ, преобразуемъ сперва Эйлерова выраженіе B . числа.

Именно, такъ какъ:

$$1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\dots=\frac{(-1)^{n+1}(2\pi)^{2n}B_{2n}}{2.1.2\dots 2n}$$

то

$$\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\frac{1}{6^{2n}}+\dots=\frac{(-1)^{n+1}\pi^{2n}B_{2n}}{2.1.2\dots 2n}$$

Умноживъ послѣднее равенство на 2 и вычитая изъ предыдущаго, имѣемъ:

$$1-\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}-\frac{1}{4^{2n}}+\dots=(-1)^{n+1}\frac{(2^{2n-1}-1)}{1.2\dots 2n}\pi^{2n}B_{2n}$$

$$B_{2n}=(-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 2 \dots 2n}{(2^{2n-1}-1)\pi^{2n}} \left[1 - \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} - \frac{1}{4^{2n}} + \dots \right]$$

Входящій въ это выраженіе безконечный рядъ можно, какъ и въ первомъ случаѣ, выразить чрезъ опредѣленный интегралъ; дѣйствительно:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{(lx)^{2n-1}}{1+x} dx &= \int_0^1 (lx)^{2n-1} (1-x+x^2-x^3+\dots) dx = \\ &= -1 \cdot 2 \dots (2n-1) \left[1 - \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} - \frac{1}{4^{2n}} + \dots \right]; \\ \left(1 - \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} - \frac{1}{4^{2n}} + \dots \right) &= -\frac{1}{1 \cdot 2 \dots (2n-1)} \int_0^1 \frac{(lx)^{2n-1}}{1+x} dx \end{aligned}$$

и слѣдовательно:

$$B_{2n}=(-1)^n \frac{2n}{(2^{2n-1}-1)\pi^{2n}} \int_0^1 \frac{(lx)^{2n-1}}{1+x} dx \quad (\text{VI})$$

Замѣняя здѣсь x чрезъ e^{-z} , имѣемъ:

$$\begin{aligned} B_{2n} &= (-1)^n \frac{2n}{(2^{2n-1}-1)\pi^{2n}} \int_{\infty}^0 \frac{s^{2n-1} e^{-z}}{1+e^{-z}} ds \\ B_{2n} &= (-1)^{n+1} \frac{2n}{(2^{2n-1}-1)\pi^{2n}} \int_0^{\infty} \frac{s^{2n-1}}{e^z+1} dz \quad (\text{VII}) \end{aligned}$$

Если же положимъ $z=2\pi t$, то изъ (VII) найдемъ:

$$B_{2n}=(-1)^{n+1} \frac{2n(2\pi)^{2n}}{(2^{2n-1}-1)\pi^{2n}} \int_0^{\infty} \frac{t^{2n-1} dt}{e^{2\pi t}+1}$$

или

$$B_{2n}=(-1)^{n+1} \frac{2^{2n+1}n}{(2^{2n-1}-1)} \int_0^{\infty} \frac{t^{2n-1}}{e^{2\pi t}+1} dt \quad (\text{VIII})$$

ГЛАВА III.

Исследование Бернуллиевых чисел въ связи съ Бернуллиевыми функциями.

Всѣ разсмотрѣнные въ предыдущей главѣ возвратные ряды и выраженія для чиселъ Я. Бернулли представляютъ, какъ мы видѣли, результатъ удачной разработки началъ, положенныхъ еще Эйлеромъ. Новымъ шагомъ въ развитіи теоріи Б. чиселъ было исследование свойствъ Бернуллиевыхъ функций. Начало ему было положено Раабе; затѣмъ оно продолжалось, главнымъ образомъ, въ виду желанія математиковъ найти дополнительный членъ для формулы суммированія Эйлера, ибо этотъ вопросъ требуетъ знанія свойствъ Б. функций. Онъ былъ разрѣшенъ вполне удачно и формула Эйлера сдѣлалась одной изъ основныхъ формулъ математическаго анализа; изученіе же Бернуллиевыхъ функций продолжалось въ виду представляемаго ими интереса и привело къ открытію многихъ замѣчательныхъ ихъ свойствъ.

Въ настоящей главѣ мы коснемся, однако, только тѣхъ свойствъ Б. функций, которыя необходимы для дальнѣйшаго изученія Б. чиселъ.

§ 16. Свойства Бернуллиевыхъ функций.

Какъ мы видѣли въ I-й главѣ, Бернулліева функція имѣетъ слѣдующій видъ:

$$\varphi_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + B_1 x^n + B_2 \frac{n}{1.2} x^{n-1} + B_3 \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4} x^{n-2} + \dots (1)$$

и основное свойство ея то, что для цѣлыхъ значеній переменнаго x она обращается въ сумму одинаковыхъ n -хъ степеней натуральныхъ чиселъ отъ 1 до $(x-1)$ включительно:

$$\varphi_n(x) = 1^n + 2^n + 3^n + \dots + (x-1)^n \quad (2)$$

Такъ какъ Б. функции не содержатъ постоянныхъ количествъ и степень переменнаго въ нихъ, начиная съ 3-го члена, понижается на 2 единицы, то послѣдній членъ Б. функции будетъ содержать либо x , либо x^2 . Отсюда два рода этихъ функций: съ четнымъ указателемъ:

$$\begin{aligned}\varphi_{2n}(x) = & \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + B_1 x^{2n} + B_2 \frac{2n}{1 \cdot 2} x^{2n-1} + \\ & + B_3 \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^{2n-2} + \dots \\ & \dots + B_{2k} \frac{2n(2n-1) \dots (2n-2k+2)}{1 \cdot 2 \dots 2k} x^{2n-2k+1} + \dots B_{2n} x\end{aligned}\quad (3)$$

и съ нечетнымъ указателемъ:

$$\begin{aligned}\varphi_{2n-1}(x) = & \frac{x^{2n}}{2n} + B_1 x^{2n-1} + B_2 \frac{(2n-1)}{1 \cdot 2} x^{2n-2} + \\ & + B_3 \frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^{2n-3} + \dots \\ & \dots + B_{2k} \frac{(2n-1)(2n-2) \dots (2n-2k+1)}{1 \cdot 2 \dots 2k} x^{2n-2k} + \dots \\ & \dots + B_{2n-1} \frac{(2n-1)}{1 \cdot 2} x^2.\end{aligned}\quad (4)$$

Очевидно, что $\varphi_n(0)=0$; сверхъ того, для цѣлыхъ значеній переменнаго

$$\varphi_n(x) - \varphi_n(x-1) = (x-1)^n;$$

отсюда:

$$\varphi_n(1)=0; \quad \varphi_n(2)=1 \quad (5)$$

Измѣняя во (2) x на $(x+1)$, имѣемъ еще:

$$\varphi_n(x+1) - \varphi_n(x) = x^n; \quad \Delta \varphi_n(x) = x^n,$$

если $\Delta x=1$. Это, впрочемъ, слѣдуетъ изъ самаго опредѣленія Б. функций. Такимъ образомъ, конечныя разности Бернуллиевыхъ функций для приращенія переменнаго на 1, выражаются чрезвычайно просто сравнительно съ другими функциями. Это свойство, очевидное, когда переменное Б. функции есть число цѣлое, можетъ быть доказано и для какого угодно значенія ея переменнаго. Для этого замѣтимъ, что непосредственно изъ выражений Б. функций (3) и (4) слѣдуютъ такіе выраженія ихъ производныхъ:

$$\begin{aligned}\varphi'_{2n}(x) &= 2n \cdot \varphi_{2n-1}(x) + B_{2n} \\ \varphi'_{2n+1}(x) &= (2n+1) \varphi_{2n}(x)\end{aligned}\quad (6)$$

или вообще

$$\varphi'_n(x) = n\varphi_{n-1}(x) + B_n \quad (7)$$

Дифференцируя это равенство n разъ, мы получимъ такую таблицу послѣдовательныхъ производныхъ Бернуллиевой функціи:

$$\begin{aligned} \varphi''_n(x) &= n[(n-1)\varphi_{n-2}(x) + B_{n-1}] \\ \varphi'''_n(x) &= n(n-1)[(n-2)\varphi_{n-3}(x) + B_{n-2}] \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_n^{(k)}(x) &= n(n-1)(n-2)\dots[(n-k+1)\varphi_{n-k}(x) + B_{n-k+1}] \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_n^{(n)}(x) &= n(n-1)\dots 3.2[\varphi_0(x) + B_1] = n(n-1)\dots 2 \left[x - \frac{1}{2} \right] \\ \varphi_n^{(n+1)}(x) &= n(n-1)\dots 3.2.1. \end{aligned} \quad (8)$$

Но конечное приращеніе функціи $f(x)$ степени $(n+1)$ -й для приращенія x на 1 можетъ быть, по формулѣ Маклорена, выражено такъ:

$$\begin{aligned} \Delta f(x) = f(x+1) - f(x) &= f(1) - f(0) + \frac{f'(1) - f'(0)}{1} x + \frac{f''(1) - f''(0)}{1.2} x^2 + \\ &\dots + \frac{f^{(n-1)}(1) - f^{(n-1)}(0)}{1.2\dots(n-1)} x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(1) - f^{(n)}(0)}{1.2\dots n} x^n. \end{aligned}$$

Полагая здѣсь $f(x) = \varphi_n(x)$, имѣемъ на основаніи всего вышесказаннаго:

$$\Delta \varphi_n(x) = \frac{\varphi_n^{(n)}(1) - \varphi_n^{(n)}(0)}{1.2\dots n} = x^n. \quad (9)$$

Этимъ свойствомъ Б. функціи мы часто будемъ пользоваться и прежде всего примѣнимъ его къ разсмотрѣнію значеній Б. функцій при $x = \frac{1}{2}$. По доказанному:

$$\varphi_{2n}(x) - \varphi_{2n}(x-1) = (x-1)^{2n};$$

съ другой стороны

$$\varphi_{2n}(x) + \varphi_{2n}(-x) = 2B_n x^{2n} = -x^{2n}.$$

Изменяя въ 1-мъ изъ уравненій x на $(1-x)$ и складывая его со 2-мъ, найдемъ:

$$\varphi_{2n}(1-x) + \varphi_{2n}(x) = 0$$

отсюда:

$$\varphi_{2n}\left(\frac{1}{2}\right) = 0. \quad (10)$$

Функция же съ нечетнымъ указателемъ при $x = \frac{1}{2}$ въ 0 не обращается. Въ этомъ нельзя, впрочемъ убѣдиться тѣмъ способомъ, который мы прилагали къ $\varphi_{2n}(x)$, ибо, составляя для этого случая равенства, аналогичныя прежнимъ, получили бы тождество. Можно однако, иначе усмотрѣть, что $\varphi_{2n}(x)$, обращаясь въ 0 при $x=0$, $x = \frac{1}{2}$, $x=1$, не имѣетъ корней между этими значеніями и потому сохраняетъ свой знакъ при измененіяхъ x отъ 0 до $\frac{1}{2}$, мѣняетъ его, переходя чрезъ 0 при $x = \frac{1}{2}$, затѣмъ не мѣняетъ его вплоть до $x=1$. Функция же съ нечетнымъ указателемъ не имѣетъ корней между $x=0$ и $x=1$ и потому при измененіяхъ x отъ 0 до 1 сохраняетъ свой знакъ. Эти свойства очевидны для функций съ малыми указателями:

$$\varphi_1(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} = \frac{x}{2}(x-1)$$

$$\varphi_3(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6} = \frac{x}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1)$$

поэтому, предложеніе будетъ доказано, если мы, допустивъ, что оно справедливо для $\varphi_{2n-1}(x)$ и $\varphi_{2n}(x)$, докажемъ, что оно должно имѣть мѣсто для функций $\varphi_{2n+1}(x)$ и $\varphi_{2n+2}(x)$. Для этого допустимъ сперва обратное, т. е. что $\varphi_{2n+1}(x)$ имѣетъ нѣкоторый корень ξ , заключающійся въ промежуткѣ отъ 0 до 1, напр. между 0 и $\frac{1}{2}$, или между $\frac{1}{2}$ и 1. Но тогда, по теоремѣ Ролля, производная $\varphi'_{2n+1}(x)$ должна имѣть корень между 0 и ξ или между $\frac{1}{2}$ и ξ , а это невозможно, такъ какъ

$$\varphi'_{2n+1}(x) = (2n+1)\varphi_{2n}(x),$$

а $\varphi_{2n}(x)$, по допущению, въ промежуткахъ $(0, \frac{1}{2})$ и $(\frac{1}{2}, 1)$ кор-
ней не имѣетъ. Такъ какъ, да въ
этомъ случаѣ $\varphi'_{2n+1}(\frac{1}{2}) = (2n+1)\varphi_{2n}(\frac{1}{2}) = 0$, то

то очевидно, что при $x = \frac{1}{2}$ $\varphi_{2n+1}(x)$ достигаетъ своего наибольшаго или наименьшаго значенія и, слѣдовательно, при непрерывномъ измѣненіи x отъ 0 до $\frac{1}{2}$ все время измѣняется одинаковымъ образомъ, а послѣ того, какъ x сдѣлается равнымъ $\frac{1}{2}$, измѣняется въ обратномъ смыслѣ. Переходя теперь къ функции $\varphi_{2n+2}(x)$, допустимъ, что она обращается въ 0 при какомъ-нибудь значеніи $x = \xi'$, отличномъ отъ $0, \frac{1}{2}, 1$ и заключающемся въ промежуткѣ $(0, \frac{1}{2})$ или же $(\frac{1}{2}, 1)$; тогда производная ея:

$$\varphi'_{2n+2}(x) = (2n+2)\varphi_{2n+1}(x) + B_{2n+2}$$

должна имѣть корень между 0 и ξ' и другой корень между ξ' и $\frac{1}{2}$, или же первый корень между $\frac{1}{2}$ и ξ' , а второй между ξ' и 1, т. е. либо въ промежуткѣ $(0, \frac{1}{2})$, либо между $\frac{1}{2}$ и 1 должна имѣть 2 корня. Но въ силу того, что было замѣчено объ измѣненіи $\varphi_{2n+1}(x)$, заключаемъ, что функция

$$(2n+2)\varphi_{2n+1}(x) + B_{2n+2}$$

можетъ только одинъ разъ обратиться въ 0 при измѣненіяхъ x отъ 0 до $\frac{1}{2}$ и только разъ при измѣненіяхъ x отъ $\frac{1}{2}$ до 1; поэтому, предположеніе о существованіи корня ξ' , приводящее къ слѣдствію, что та же функция имѣетъ два корня въ промежуткѣ $(0, \frac{1}{2})$ или $(\frac{1}{2}, 1)$ должно быть отвергнуто. Итакъ, допустивъ,

что наше предположеніе справедливо для $\varphi_{2n-1}(x)$ и $\varphi_{2n}(x)$, мы доказали, что оно должно имѣть мѣсто для $\varphi_{2n+1}(x)$ и $\varphi_{2n+2}(x)$; но оно справедливо для $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ и потому вообще справедливо.

На основаніи доказанныхъ свойствъ Б. функций легко получить новое и важное выраженіе Б. числа чрезъ определенный интегралъ; именно, по ф. (6) этого §

отсюда:

$$\int_0^1 \varphi_{2n-1}(x) dx = \frac{[\varphi_{2n}(x)]_0^1 - B_{2n}}{2n} = -\frac{B_{2n}}{2n}$$

и

$$B_{2n} = -2n \int_0^1 \varphi_{2n-1}(x) dx \quad (11)$$

§ 17. Вычисленіе $\varphi_{2n-1}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Итакъ, при $x = \frac{1}{2}$, Б. функция съ нечетнымъ указателемъ достигаетъ своего единственнаго наибольшаго или наименьшаго значенія изъ тѣхъ, которыя она получаетъ при измененіи x отъ 0 до 1. Это значеніе для $\varphi_{2n-1}(x)$ точно и весьма просто выражается чрезъ B_{2n} и можетъ служить для раскрытія многихъ свойствъ чиселъ Я. Бернулли; поэтому мы вычислимъ $\varphi_{2n-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, (причемъ будемъ придерживаться способа, указаннаго академикомъ В. Г. Имшенецкимъ *). Именно, разложимъ въ рядъ по ф. Маклорена функцию $\varphi_{2n+1}\left(\frac{1}{2} - x\right)$, причемъ будемъ имѣть въ виду равенство (10) и таблицу (8) § 16; найдемъ:

$$\begin{aligned} \varphi_{2n+1}\left(\frac{1}{2} - x\right) &= \varphi_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} (2n+1) \left[2n \varphi_{2n-1}\left(\frac{1}{2}\right) + B_{2n}\right] + \\ &+ \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (2n+1) 2n (2n-1) \left[(2n-2) \varphi_{2n-3}\left(\frac{1}{2}\right) + B_{2n-2}\right] + \dots \end{aligned}$$

*) „О функцияхъ Я. Бернулли“. Зап. Имп. Казанскаго Унив. 1870 г.

$$\dots + \frac{x^{2n}}{1 \cdot 2 \dots 2n} (2n+1) 2n \dots 3 \left[2\varphi\left(\frac{1}{2}\right) + B_2 \right] +$$

$$+ \frac{x^{2n+2}}{1 \cdot 2 \dots (2n+2)} (2n+1) \dots 2 \cdot 1.$$

Полагая здесь $x = \frac{1}{2}$, мы получимъ:

$$0 = \varphi_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2^2} \frac{(2n+1) \left[2n\varphi_{2n-1}\left(\frac{1}{2}\right) + B_{2n} \right]}{1 \cdot 2} + \dots$$

$$+ \frac{1}{2^4} \frac{(2n+1) 2n (2n-1) \left[(2n-2)\varphi_{2n-3}\left(\frac{1}{2}\right) + B_{2n-2} \right]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

$$= \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n+1) 2n \dots 3 \left[2\varphi\left(\frac{1}{2}\right) + B_2 \right]}{1 \cdot 2 \dots 2n} + \frac{1}{2^{2n+2}} \frac{(2n+1) \dots 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \dots (2n+2)}$$

Но, подставляя $x = \frac{1}{2}$ непосредственно въ выраженіе $\varphi_{2n+1}(x)$, имѣемъ:

$$\varphi_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right) = B_{2n} \frac{(2n+1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{1}{2}\right)^1 + B_{2n-2} \frac{(2n+1) 2n (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots$$

$$+ B_2 \frac{(2n+1) 2n (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2} + B_0 \frac{(2n+1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} -$$

$$- \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}$$

Это выраженіе для $\varphi_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right)$ мы и внесемъ въ предыдущую формулу; по умноженіи обѣихъ частей уравненія на 2^{2n+1} , получимъ:

$$0 = \frac{2^{2n-1} (2n+1) \left[2n\varphi_{2n-1}\left(\frac{1}{2}\right) + 2B_{2n} \right]}{1 \cdot 2} +$$

$$+ \frac{2^{2n-3} (2n+1) 2n (2n-1) \left[(2n-2)\varphi_{2n-3}\left(\frac{1}{2}\right) + 2B_{2n-2} \right]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$+ \dots + \frac{2(2n+1) \left[2\varphi_1\left(\frac{1}{2}\right) + 2B_1 \right]}{1.2} + \frac{1}{2} \frac{2}{2n+2} - \frac{1}{2}$$

Но такъ въ силу соотношеній Моавра:

$$\frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2} + B_1 \frac{(2n+1)}{1.2} + B_2 \frac{(2n+1)2n(n-1)}{1.2.3.4} + \dots + \frac{2n+1}{1.2} B_{n+1} = 0,$$

то, вычитая это равенство изъ предыдущаго, найдемъ:

$$\begin{aligned} & \frac{(2n+1)}{1.2} \left[2n \cdot 2^{2n-1} \varphi_{2,n-1} \left(\frac{1}{2} \right) + (2^{2n}-1) B_{2,n} \right] + \\ & + \frac{(2n+1)2n(2n-1)}{1.2.3.4} \left[(2n-2)2^{2n-1} \varphi_{2,n-2} \left(\frac{1}{2} \right) + \right. \\ & \left. + (2^{2n-2}-1) B_{2,n-2} \right] + \dots + \frac{(2n+1)}{1.2} \left[2 \cdot 2\varphi_1 \left(\frac{1}{2} \right) + (2^2-1) B_2 \right] = 0. \end{aligned}$$

Если подставимъ сюда послѣдовательно вмѣсто n 1, 2, 3... n , то получимъ:

$$\frac{(2n+1)}{1.2} \left[2n \cdot 2^{2n-1} \varphi_{2,n-1} \left(\frac{1}{2} \right) + (2^{2n}-1) B_{2,n} \right] = 0$$

откуда

$$\varphi_{2,n-1} \left(\frac{1}{2} \right) = - \frac{B_{2,n}(2^{2n}-1)}{2^{2n-1}2n} \quad (1)$$

и

$$B_{2,n} = - \frac{2^{2n-1}2n\varphi_{2,n-1} \left(\frac{1}{2} \right)}{(2^{2n}-1)} \quad (2)$$

Вмѣсто изложеннаго способа для вычисленія $\varphi_{2,n-1} \left(\frac{1}{2} \right)$ въ нѣкоторыхъ сочиненіяхъ употребляется другой, нѣсколько искусственный приемъ. Онъ основанъ на томъ соображеніи, что Б. функция $\varphi_{2,n-1}(x)$ можетъ быть рассматриваема какъ коэффициентъ при x^{2n-1} , умноженный на $1.2 \dots (2n-1)$, въ разложеніи по степенямъ x функции:

$$\frac{e^{2x} - e^x}{e^x - 1}.$$

Въ самомъ дѣлѣ:

$$\frac{e^{2x} - e^x}{e^x - 1} = \frac{1}{e^x - 1} \cdot e^{2x} - \frac{e^x}{e^x - 1}$$

но

$$\frac{e^s}{e^s-1} = 1 + \frac{1}{e^s-1} = \frac{1}{s} - B_1 + B_2 \frac{s}{1 \cdot 2} - B_3 \frac{s^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

и потому:

$$\begin{aligned} \frac{e^{xs}-e^{-s}}{e^s-1} &= \left(1 + \frac{xs}{1} + \frac{x^2 s^2}{1 \cdot 2} + \dots\right) \left(\frac{1}{s} - B_1 + B_2 \frac{s}{1 \cdot 2} - \dots\right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{s} - B_1 + B_2 \frac{s}{1 \cdot 2} - B_3 \frac{s^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots\right) \end{aligned}$$

Здесь коэффициент при s^{2n-1} будет:

$$\begin{aligned} &\frac{B_{2n-2}}{1 \cdot 2 \dots (2n-2)} \frac{x^{2n-1}}{1 \cdot 2} + \frac{B_{2n-4}}{1 \cdot 2 \dots (2n-4)} \frac{x^{2n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \\ &\quad + \frac{B_2}{1 \cdot 2} \frac{x^{2n-1}}{1 \cdot 2 \dots (2n-2)} - \frac{1}{2} \frac{x^{2n-1}}{1 \cdot 2 \dots (2n-1)} + \frac{1}{2n} \\ &\text{что, по умноженіи на } 1 \cdot 2 \dots (2n-1), \text{ дѣйствительно дастъ:} \\ &\frac{x^{2n}}{2n} + B_1 x^{2n-1} + B_2 \frac{(2n-1)}{1 \cdot 2} x^{2n-1} + B_3 \frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^{2n-1} + \dots \\ &\quad + B_{n-1} \frac{(2n-1)}{1 \cdot 2} x^2, \end{aligned}$$

т. е. $\varphi_{2n-1}(x)$. Аналогичнымъ образомъ опредѣляется и вообще $\varphi_n(x)$. Вслѣдствіе этого, $\varphi_{2n-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ будетъ тождественно съ значеніемъ коэфф. при e^{2n-1} , умноженнаго на $1 \cdot 2 \dots (2n-1)$, въ разложеніи по степенямъ s выраженія:

$$\frac{e^{\frac{1}{2}s} - e^{-s}}{e^s - 1} = \frac{1}{\frac{s}{2}} - 1 - \frac{2}{e^s - 1}.$$

Но

$$\frac{1}{e^{\frac{s}{2}} - 1} = \frac{2}{s} + B_1 + B_2 \frac{1}{1.2} \left(\frac{s}{2}\right) + \dots + B_{2n-1} \frac{1}{1.2 \dots 2n} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n-1} + \dots$$

$$\frac{2}{e^{\frac{s}{2}} - 1} = \frac{2}{s} + 2B_1 + 2B_2 \frac{s}{1.2} + \dots + 2B_{2n-1} \frac{s^{2n-1}}{1.2 \dots (2n-1)} + \dots$$

следовательно:

$$\varphi_{2n-1} \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{B_{2n}}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} - \frac{2B_{2n}}{2n} = -B_{2n} \frac{(2^{2n}-1)}{2^{2n-1} 2n}.$$

Исследование при помощи указанного способа Б. функций приводит къ раскрытію многихъ интересныхъ ихъ свойствъ (Schlömilch, Bertrand).

§ 18. Выводъ формулы Эйлера съ дополнительнымъ членомъ.

Пользуясь выведенными свойствами функций Я. Бернулли, мы можемъ получить выраженіе формулы суммированія Эйлера съ дополнительнымъ членомъ.

Замѣтимъ, что въ виду важности формулы Эйлера для Анализа, изученію остаточнаго члена этой формулы были посвящены многочисленныя изслѣдованія. Такъ, извѣстны труды Пуассона, Якоби, Остроградскаго, Шлемилха, Мальмстена и др., посвященные этому предмету. Но наиболѣе простое и изящное рѣшеніе этого вопроса принадлежитъ академику Имшенецкому, который предложилъ его въ вышеупомянутой статьѣ: «О функцияхъ Я. Бернулли». Этотъ выводъ формулы Эйлера съ дополнительнымъ членомъ мы и приведемъ здѣсь. Подобно извѣстному выводу формулы Тейлора съ остаточнымъ членомъ, онъ основанъ на примѣненіи послѣдовательнаго интегрированія по частямъ къ выраженію:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \int_0^1 f'(x+hs) ds.$$

Именно, мы имѣемъ интегрируя по частямъ:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \int_0^1 f'(x+hs) ds = f'(x+h) - h \int_0^1 s f''(x+hs) ds$$

Но $s = \varphi_1'(s) - B_1$, и потому

$$\begin{aligned} \int_0^1 s f'''(x+hs) ds &= \int_0^1 [\varphi_1'(s) - B_1] f'''(x+hs) ds = \\ &= -\frac{B_1}{h} [f''(x+h) - f''(x)] - h \int_0^1 \varphi_1(s) f'''(x+hs) ds \end{aligned}$$

Примѣняя вновь тотъ же приемъ, последовательно найдемъ:

$$\begin{aligned} &= -\int_0^1 \varphi_1(s) f'''(x+hs) ds = \int_0^1 \frac{[\varphi_1'(s) - B_1]}{2} f'''(x+hs) ds = \\ &\quad -\frac{B_1}{2h} [f''(x+h) - f''(x)] - \frac{h}{2} \int_0^1 \varphi_1(s) f^{IV}(x+hs) ds \\ \int_0^1 \varphi_1(s) f^{IV}(x+hs) ds &= \int_0^1 \frac{\varphi_1'(s)}{3} f^{IV}(x+hs) ds = -\frac{h}{3} \int_0^1 \varphi_1(s) f^{V}(x+hs) ds \\ &\quad \int_0^1 \varphi_1(s) f^{V}(x+hs) ds = \int_0^1 \frac{[\varphi_1'(s) - B_1]}{4} f^{V}(x+hs) ds = \\ &= -\frac{B_1}{4h} [f^{IV}(x+h) - f^{IV}(x)] - \frac{h}{4} \int_0^1 \varphi_1(s) f^{VI}(x+hs) ds \\ &\quad \int_0^1 \varphi_1(s) f^{VI}(x+hs) ds = \frac{1}{5} \int_0^1 \varphi_1'(s) f^{VI}(x+hs) ds = \\ &= -\frac{h}{5} \int_0^1 \varphi_1(s) f^{VII}(x+hs) ds \end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \varphi_{2n-2}(s) f^{(2n-2)}(x+hs) ds &= \int_0^1 \frac{[\varphi_{2n-2}(s) - B_{2n-2}]}{2n-2} f^{(2n-2)}(x+hs) ds = \\
 &= -\frac{B_{2n-2}}{(2n-2)h} [f^{(2n-2)}(x+h) - f^{(2n-2)}(x)] - \\
 &\quad - \frac{h}{2n-2} \int_0^1 \varphi_{2n-2}(s) f^{(2n-1)}(x+hs) ds \\
 \int_0^1 \varphi_{2n-2}(s) f^{(2n)}(x+hs) ds &= \frac{1}{2n-1} \int_0^1 \varphi_{2n-1}(s) f^{(2n)}(x+hs) ds = \\
 &= -\frac{h}{2n-1} \int_0^1 \varphi_{2n-1}(s) f^{(2n+1)}(x+hs) ds.
 \end{aligned}$$

Умножая обе части первого равенства на $+h$, 2-го на $-h^2$, 3-го на $+h^3$, 4-го на $-\frac{h^4}{1.2}$, 5-го на $\frac{h^5}{1.2.3}$ и т. д., предпоследняго на $\frac{h^{2n-1}}{1.2 \dots (2n-3)}$ и послѣдняго на $\frac{h^{2n}}{1.2 \dots (2n-2)}$ и складывая ихъ почленно, найдемъ:

$$\begin{aligned}
 f(x+h) - f(x) &= hf'(x+h) + B_1 h [f'(x+h) - f'(x)] - \\
 &- B_2 \frac{h^2}{1.2} [f''(x+h) - f''(x)] + B_3 \frac{h^3}{1.2.3.4} [f^{IV}(x+h) - f^{IV}(x)] - \\
 &- B_5 \frac{h^5}{1.2 \dots 6} [f^{VI}(x+h) - f^{VI}(x)] - \dots \\
 &\dots - B_{2n-2} \frac{h^{2n-2}}{1.2 \dots (2n-2)} [f^{(2n-2)}(x+h) - f^{(2n-2)}(x)] + \\
 &+ \frac{h^{2n+1}}{1.2 \dots (2n-1)} \int_0^1 \varphi_{2n-1}(s) f^{(2n+1)}(x+hs) ds
 \end{aligned}$$

Замѣняя B , чрезъ $-\frac{1}{2}$ и дѣлая приведеніе, имѣемъ:

$$f(x+h) - f(x) - \frac{1}{2}hf''(x+h) + \frac{1}{2}hf''(x) = hf''(x) - B_1 \frac{h^2}{1 \cdot 2} [f'''(x+h) - f'''(x)] + \dots$$

Отсюда:

$$hf''(x) = [f(x+h) - f(x)] - B_1 h [f'(x+h) - f'(x)] +$$

$$+ B_1 \frac{h^2}{1 \cdot 2} [f''(x+h) - f''(x)] +$$

$$+ B_1 \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} [f'''(x+h) - f'''(x)] + \dots$$

$$\dots - \frac{h^{2n+1}}{1 \cdot 2 \dots (2n-1)} \int_0^1 \varphi_{2n-1}(s) f^{(2n+1)}(x+hs) ds \quad (\text{I})$$

Такъ какъ въ последнемъ членѣ, который обозначимъ R_{2n+1} , объ подынтегральныхъ функций измѣняются непрерывно при измѣненіи s отъ 0 до 1 и $\varphi_{2n-1}(s)$ сохраняетъ, какъ мы видѣли, въ этомъ промежуткѣ свой знакъ, то, какъ извѣстно, можемъ написать:

$$R_{2n+1} = - \frac{h^{2n+1}}{1 \cdot 2 \dots (2n-1)} \int_0^1 \varphi_{2n-1}(s) f^{(2n+1)}(x+hs) ds =$$

$$- \frac{h^{2n+1} f^{(2n+1)}(x+\theta h)}{1 \cdot 2 \dots (2n-1)} \int_0^1 \varphi_{2n-1}(s) ds$$

гдѣ $0 < \theta < 1$. Совершая интегрирование, найдемъ по § 17, (1):

$$R_{2n+1} = B_{2n} \frac{h^{2n+1}}{1 \cdot 2 \dots 2n} f^{(2n+1)}(x+\theta h)$$

и формула Эйлера приметъ такой видъ:

$$hf''(x) = [f(x+h) - f(x)] - B_1 h [f'(x+h) - f'(x)] +$$

$$+ B_1 \frac{h^2}{1 \cdot 2} [f''(x+h) - f''(x)] + B_1 \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} [f'''(x+h) - f'''(x)] + \dots$$

$$\dots + B_{2n} \frac{h^{2n+1}}{1 \cdot 2 \dots 2n} f^{(2n+1)}(x+\theta h) \quad (\text{II})$$

Но дополнительному члену можно дать иное выражение, основываясь на томъ, что $\varphi_{2n-1}(s)$ при измененіи s отъ 0 до 1 получаетъ при $s = \frac{1}{2}$ свое единственное наибольшее или наименьшее значеніе. Именно, по § 17, (1), имѣемъ:

$$R_{2n+1} = \frac{h^{2n+1}}{1 \cdot 2 \dots 2n} \cdot \theta \cdot \frac{B_{2n}(2^{2n}-1)}{2^{2n-1}} \int_0^1 f^{(2n+1)}(x+hs) ds =$$

$$= \theta \frac{h^{2n}}{1 \cdot 2 \dots 2n} \cdot B_{2n} \cdot \frac{2^{2n}-1}{2^{2n-1}} [f^{(2n)}(x+h) - f^{(2n)}(x)]$$

Полагая $\Delta x = h$, можемъ, слѣдовательно, формулу Эйлера съ дополнительнымъ членомъ представить такъ:

$$hf'(x) = \Delta f(x) + B_1 \Delta f'(x) + B_2 \frac{h^2}{1 \cdot 2} \Delta f''(x) + B_4 \frac{h^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \Delta f^{IV}(x) + \dots$$

$$\dots + B_{2n} \theta \frac{h^{2n}}{1 \cdot 2 \dots 2n} \cdot \frac{(2^{2n}-1)}{2^{2n-1}} \Delta f^{(2n)}(x) \quad (\text{III})$$

Формулы (II) и (III) называются обыкновенно формулами Малмстена, который предложилъ ихъ въ 1847 г. (Journal de Crelle, 35), но первая изъ нихъ ранѣе была получена Остроградскимъ и помѣщена въ мемуарахъ Императорской Академіи Наукъ въ 1841 г.

§ 19. Формула Дарбу.

Изъ формулы Эйлера при помощи нѣкоторыхъ простыхъ преобразований можно получить, какъ показалъ Дарбу, формулу для разложенія въ рядъ любой нечетвой функціи. Для этого въ формулѣ (I) предыдущаго § замѣняемъ x чрезъ $-x$, h чрезъ $2x$. Найдемъ:

$$2xf'(-x) = f(x) - f(-x) + B_1(2x)[f'(x) - f'(-x)] +$$

$$+ B_2 \frac{(2x)^2}{1 \cdot 2} [f''(x) - f''(-x)] +$$

$$+ B_4 \frac{(2x)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} [f^{IV}(x) - f^{IV}(-x)] + \dots + R_{2n+1},$$

гдѣ

$$R_{2n+1} = - \frac{(2x)^{2n+1}}{1.2 \dots (2n-1)} \int_0^1 \varphi_{2n-1}(s) f^{(2n+1)}(-x+2xs) ds.$$

Замѣняя s чрезъ $(1-s)$, мы получимъ отсюда, имѣя въ виду, что $\varphi_{2n-1}(s) = \varphi_{2n-1}(-s)$:

$$R_{2n+1} = - \frac{(2x)^{2n+1}}{1.2 \dots (2n-1)} \int_0^1 \varphi_{2n-1}(s) f^{(2n+1)}(-x-2xs) ds$$

Если возьмемъ полусумму обоихъ выраженій для R_{2n+1} , найдемъ:

$$\begin{aligned} R_{2n+1} &= - \frac{2^{2n} x^{2n+1}}{1.2 \dots (2n+1)} \int_0^1 \varphi_{2n-1}(s) [f^{(2n+1)}(-x+2xs) + \\ &\quad + f^{(2n+1)}(-x-2xs)] ds = \\ &= - \frac{2^{2n}}{1.2 \dots (2n-1)} \left\{ x^{2n+1} \int_0^1 \varphi_{2n-1}(s) f^{(2n+1)}(-x+2xs) ds - \right. \\ &\quad \left. - (-x)^{2n+1} \int_0^1 \varphi_{2n-1}(s) f^{(2n+1)}(x-2xs) ds \right\} \\ &\quad - f(-x) \int_0^1 \varphi_{2n-1}(s) ds \end{aligned}$$

Обозначая $[f(x) - f(-x)]$ просто чрезъ $f(x)$, т. е. разумѣя подъ этимъ символомъ нечетную функцію, найдемъ послѣ приведенія:

$$xf'(x) = f(x) + \frac{B_2}{1.2} (2x)^2 f''(x) + B_4 \frac{(2x)^4}{1.2.3.4} f^{IV}(x) + \dots$$

$$\dots - \frac{2^{2n} x^{2n+1}}{1.2 \dots (2n-1)} \int_0^1 \varphi_{2n-1}(s) f^{(2n+1)}(-x-2xs) ds$$

Преобразуя послѣдній членъ, получимъ:

$$B_{2n+1} = -\frac{2^{2n}x^{2n+1}}{1 \cdot 2 \dots (2n-1)} - \frac{B_{2n}}{2n} f^{(2n+1)}(0x) =$$

$$= \frac{2^{2n}x^{2n+1}}{1 \cdot 2 \dots 2n} B_{2n} f^{(2n+1)}(0x)$$

и потому:

$$xf''(x) = f(x) + B_2 \frac{(2x)^2}{1 \cdot 2} f''(x) + B_4 \frac{(2x)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} f^{IV}(x) + \dots$$

$$\dots + B_{2n} \frac{2^{2n}x^{2n+1}}{1 \cdot 2 \dots 2n} f^{(2n+1)}(0x) \quad (1)$$

Пользуясь этой формулой, можно получать разложения различных нечетных функций въ ряды съ Бернуллиевыми коэффициентами. Пусть напр., $f(x) = \sin x$; получимъ:

$$x \cos x = \sin x - B_2 \frac{(2x)^2}{1 \cdot 2} \sin x + B_4 \frac{(2x)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \sin x - \dots$$

$$\dots + \frac{2^{2n}x^{2n+1}}{1 \cdot 2 \dots 2n} B_{2n} \cos \theta x$$

откуда

$$x \cot x = 1 - B_2 \frac{(2x)^2}{1 \cdot 2} + B_4 \frac{(2x)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots$$

$$\dots + B_{2n} \frac{2^{2n}x^{2n+1}}{1 \cdot 2 \dots 2n} \cdot \frac{\cos \theta x}{\sin x}$$

— разложение, которое въ 1-й главѣ мы имѣли безъ дополнительнаго члена.

§ 20. Формула Буля.

Кромѣ формулы Эйлера, существуетъ еще одна формула общаго характера, служащая для выраженія разности

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

при помощи нѣкотораго ряда съ Бернуллиевыми коэффициентами. Она была предложена Булемъ; подобно формулѣ Эйлера, она приводитъ къ значительному числу разложений функций въ ряды съ Бернуллиевыми коэффициентами, которыми можно воспользоваться для изученія Б. чиселъ. Мы приведемъ кратчайшій выводъ ея — безъ дополнительнаго члена.

Формула Буля имеет такой вид:

$$f(x+h) - f(x) = A_1 h [f'(x+h) + f'(x)] + \\ + A_2 h^2 [f''(x+h) + f''(x)] + A_3 h^3 [f'''(x+h) + f'''(x)] + \dots$$

Для возможности такого равенства необходимо и достаточно, чтобы, сделав разложение обеих его частей по степеням h , мы получили при одинаковых степенях h одинаковые коэффициенты. Поэтому между коэффициентами A должны иметь место следующие соотношения:

$$1 - 2A_1 = 0; \quad \frac{1}{1 \cdot 2} - A_1 - 2A_2 = 0; \quad \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{A_1}{1 \cdot 2} - A_2 - 2A_3 = 0 \dots$$

откуда последовательно получим:

$$A_1 = \frac{1}{2}, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = -\frac{1}{24} \dots$$

но мы докажем, что эти коэффициенты могут быть выражены чрез Б. числа. Для этого сделаем частное предположение, что $f(x) = e^x$; это не изменит искомым коэффициентов и мы найдем:

$$\Delta f(x) = e^x (e^h - 1) = A_1 h e^x (e^h + 1) + A_2 h^2 e^x (e^h + 1) + \dots$$

откуда

$$\frac{e^h - 1}{e^h + 1} = A_1 h + A_2 h^2 + A_3 h^3 + \dots$$

сравнивая это с разложением (3) § 4, видим, что:

$$A_1 = \frac{2B_1(2^1 - 1)}{1 \cdot 2}, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = \frac{2B_3(2^3 - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \dots$$

и формула Буля получает такой вид:

$$f(x+h) - f(x) = \frac{2B_1(2^1 - 1)h}{1 \cdot 2} [f'(x+h) + f'(x)] + \\ + \frac{2B_3 h^3 (2^3 - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} [f'''(x+h) + f'''(x)] + \dots \\ \dots + \frac{2B_{2n}(2^{2n} - 1)}{1 \cdot 2 \dots 2n} [f^{(2n+1)}(x+h) + f^{(2n+1)}(x)] + \dots$$

$$R_{2n+1} = -\frac{2^{2n}x^{2n+1}}{1 \cdot 2 \dots (2n-1)} - \frac{B_{2n}}{2n} f^{(2n+1)}(0x) =$$

$$= \frac{2^{2n}x^{2n+1}}{1 \cdot 2 \dots 2n} B_{2n} f^{(2n+1)}(0x)$$

и потому:

$$xf''(x) = f(x) + B_2 \frac{(2x)^2}{1 \cdot 2} f''(x) + B_4 \frac{(2x)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} f^{IV}(x) + \dots$$

$$\dots + B_{2n} \frac{2^{2n}x^{2n+1}}{1 \cdot 2 \dots 2n} f^{(2n+1)}(0x) \quad (1)$$

Пользуясь этой формулой, можно получать разложения различных нечетных функций въ ряды съ Бернуллиевыми коэффициентами. Пусть напр., $f(x) = \sin x$, получимъ:

$$x \cdot \cos x = \sin x - B_2 \frac{(2x)^2}{1 \cdot 2} \sin x + B_4 \frac{(2x)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \sin x - \dots$$

$$\dots + B_{2n} \frac{2^{2n}x^{2n+1}}{1 \cdot 2 \dots 2n} B_{2n} \cos \theta x$$

откуда

$$x \cot x = 1 - B_2 \frac{(2x)^2}{1 \cdot 2} + B_4 \frac{(2x)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots$$

$$\dots + B_{2n} \frac{2^{2n}x^{2n+1}}{1 \cdot 2 \dots 2n} \cdot \frac{\cos \theta x}{\sin x}$$

—разложениѣ, которое въ 1-й главѣ мы имѣли безъ дополнительнаго члена.

§ 20. Формула Буля.

Кромѣ формулы Эйлера, существуетъ еще одна формула общаго характера, служащая для выраженія разности

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

при помощи нѣкотораго ряда съ Бернуллиевыми коэффициентами. Она была предложена Булемъ; подобно формулѣ Эйлера, она приводитъ къ значительному числу разложений функций въ ряды съ Бернуллиевыми коэффициентами, которыми можно воспользоваться для изученія Б. чиселъ. Мы приведемъ кратчайшій выводъ ея — безъ дополнительнаго члена.

Формула Буля имеет такой вид:

$$f(x+h) - f(x) = A_1 h [f'(x+h) + f'(x)] + \\ + A_2 h^2 [f''(x+h) + f''(x)] + A_3 h^3 [f'''(x+h) + f'''(x)] + \dots$$

Для возможности такого равенства необходимо и достаточно, чтобы, сделав разложение обеих его частей по степеням h , мы получили при одинаковых степенях h одинаковые коэффициенты. Поэтому между коэффициентами A должны иметь место следующие соотношения:

$$1 - 2A_1 = 0; \quad \frac{1}{1.2} - A_1 - 2A_2 = 0; \quad \frac{1}{1.2.3} - \frac{A_1}{1.2} - A_2 - 2A_3 = 0 \dots$$

откуда последовательно получим:

$$A_1 = \frac{1}{2}, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = -\frac{1}{24} \dots$$

но мы докажем, что эти коэффициенты могут быть выражены чрез Б. числа. Для этого сделаем частное предположение, что $f(x) = e^x$; это не изменит искомым коэффициентов и мы найдем:

$$\Delta f(x) = e^x (e^h - 1) = A_1 h e^x (e^h + 1) + A_2 h^2 e^x (e^h + 1) + \dots$$

откуда

$$\frac{e^h - 1}{e^h + 1} = A_1 h + A_2 h^2 + A_3 h^3 + \dots$$

сравнивая это с разложением (3) § 4, видим, что:

$$A_1 = \frac{2B_1(2^1 - 1)}{1.2}, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = \frac{2B_3(2^3 - 1)}{1.2.3.4} \dots$$

и формула Буля получает такой вид:

$$f(x+h) - f(x) = \frac{2B_1(2^1 - 1)h}{1.2} [f'(x+h) + f'(x)] + \\ + \frac{2B_3 h^3 (2^3 - 1)}{1.2.3.4} [f'''(x+h) + f'''(x)] + \dots \\ \dots + \frac{2B_{2n}(2^{2n} - 1)}{1.2 \dots 2n} [f^{(2n+1)}(x+h) + f^{(2n+1)}(x)] + \dots$$

Подобно формулѣ Эйлера, и эта формула можетъ быть преобразована такъ, что будетъ давать разложение въ рядъ нечетной функции отъ x . Для этого, какъ показалъ Дарбу, должно замѣнить въ ней x чрезъ $-\frac{h}{2}$ и h чрезъ $2x$. Получимъ:

$$f\left(\frac{h}{2}\right) - f\left(-\frac{h}{2}\right) = \frac{2B_1(2^2-1)(2x)}{1 \cdot 2} \left[f'\left(\frac{h}{2}\right) + f'\left(-\frac{h}{2}\right) \right] + \\ + \frac{2B_3(2^4-1)(2x)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \left[f'''\left(\frac{h}{2}\right) + f'''\left(-\frac{h}{2}\right) \right] + \dots$$

или

$$f(x) - f(-x) = \frac{2B_1(2^2-1)}{1 \cdot 2} (2x) [f'(x) + f'(-x)] + \\ + \frac{2B_3(2^4-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (2x)^3 [f'''(x) + f'''(-x)] + \dots$$

Обозначая нечетную функцию $f(x) - f(-x)$ чрезъ $\Phi(x)$, найдемъ отсюда:

$$\Phi(x) = \frac{2B_1(2^2-1)}{1 \cdot 2} (2x) \Phi'(x) + \frac{2B_3(2^4-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (2x)^3 \Phi'''(x) + \dots$$

Такъ, полагая по прежнему $\Phi(x) = \sin x$, получимъ:

$$\sin x = \frac{2B_1(2^2-1)}{1 \cdot 2} (2x) \cos x - \frac{2B_3(2^4-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (2x)^3 \cos x + \\ + \frac{2B_5(2^6-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} (2x)^5 \cos x - \dots$$

откуда

$$\tan x = \frac{2B_1(2^2-1)}{1 \cdot 2} (2x) - \frac{2B_3(2^4-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (2x)^3 + \frac{2B_5(2^6-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} (2x)^5 - \dots$$

—разложение, которое иначе мы получили въ I-й главѣ.

§ 21. Соотношенія между Бернуллиевыми числами, получаемыя изъ разсмотрѣнія Б. функций.

Выведенными свойствами Б. функций мы воспользуемся теперь за дальнѣйшаго изслѣдованія Б. чиселъ, причемъ прежде всего

замѣтимъ, что каждому частному известному намъ значенію B . функций соответствуетъ особое соотношеніе между числами Я. Бернулли. Такъ, полагая въ выраженіяхъ $\varphi_{2n}(x)$ и $\varphi_{2n-1}(x)$ (см. § 16) $x=1$, найдемъ:

$$0 = \frac{1}{2n+1} + B_1 + B_2 \frac{2n}{1.2} + B_3 \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1.2.3.4} + \dots$$

$$0 = \frac{1}{2n} + B_1 + B_2 \frac{(2n-1)}{1.2} + B_3 \frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{1.2.3.4} + \dots$$

это, очевидно, соотношенія Моавра.

При $x=2$ имѣемъ соотношенія

$$1 = \frac{2^{2n+1}}{2n+1} + B_1 2^{2n} + B_2 \frac{2n}{1.2} 2^{2n-1} + B_3 \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1.2.3.4} 2^{2n-2} + \dots$$

$$\dots + 2B_{2n}$$

$$1 = \frac{2^{2n}}{2n} + B_1 2^{2n-1} + B_2 \frac{(2n-1)}{1.2} 2^{2n-2} + \dots + B_{2n-1} \frac{(2n-1)}{1.2} 2^{2n-2}$$

Полагая $x = \frac{1}{2}$, найдемъ:

$$0 = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{2^{2n+1}} + B_1 \frac{1}{2^{2n}} + B_2 \frac{2n}{1.2} \cdot \frac{1}{2^{2n-1}} + \dots + B_{2n} \cdot \frac{1}{2^{2n}}$$

$$- B_{2n} \frac{(2^{2n}-1)}{2^{2n} \cdot 2n} = \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{2^{2n}} + B_1 \frac{1}{2^{2n-1}} + B_2 \frac{(2n-1)}{1.2} \frac{1}{2^{2n-2}} + \dots$$

$$\dots + B_{2n-1} \frac{(2n-1)}{1.2} \frac{1}{2^{2n-2}}$$

и такъ далѣе.

§ 22. 0 разложеніи функций по функциямъ Якова Бернулли.

Особымъ средствомъ для изученія различныхъ соотношеній между B . числами можетъ служить разложеніе произвольной функции въ рядъ по функциямъ Я. Бернулли. Возможность такого разложенія основывается на свойствѣ конечныхъ разностей B . функций—выражаться степенью переменнаго, какъ то мы видѣли въ § 16, (9):

$$+ u_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_m)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_m)} + \dots$$

$$\dots + u_m \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{m-1})}{(x_m-x_0)(x_m-x_1)\dots(x_m-x_{m-1})}$$

а именно, мы имѣемъ:

$$\varphi_{2n}(x) = 1^{2n} + 2^{2n} + \dots + (x-1)^{2n} =$$

$$= \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + B_1 x^{2n} + B_2 \frac{2n}{1.2} x^{2n-1} + \dots + B_{2n} x \quad (1)$$

Функция эта $(2n+1)$ -й степени, полагая въ ней

$$x_0=0, x_1=1, x_2=2, x_3=3 \dots x_{2n+1}=2n+1,$$

находимъ соответствующія значенія функций:

$$u_0=0, u_1=0, u_2=1^{2n}, u_3=1^{2n}+2^{2n}, \dots u_{2n+1}=$$

$$= 1^{2n} + 2^{2n} + \dots + (2n)^{2n}.$$

Подставляя эти значенія въ формулу Лагранжа, имѣемъ:

$$\varphi_{2n}(x) = \frac{x(x-1)(x-3)\dots[x-(2n+1)]}{2.1.-1.-2\dots-(2n-1)} 1^{2n} +$$

$$+ \frac{x(x-1)(x-2)\dots[x-(2n+1)]}{3.2.1.-1.-2\dots-(2n-2)} (1^{2n}+2^{2n}) + \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$+ \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-2n)}{(2n+1)2n\dots3.2.1} [1^{2n}+2^{2n}+\dots+(2n)^{2n}]$$

или иначе:

$$\varphi_{2n}(x) = \frac{x(x-1)\dots[x-(2n+1)]}{1.2\dots(2n+1)} \sum_{k=2}^{k=2n+1} \frac{(2n+1)2n\dots(2n+1-k+1)}{1.2\dots k} \times$$

$$\times \frac{1}{x-k} (-1)^{2n+1-k} \sum_{p=1}^{p=k-1} p^{2n} \quad (2)$$

Сравнивая коэффициенты при x въ 1-й степени въ формулахъ (1) и (2), находимъ выраженіе Б. числа:

$$B_{2n} = \sum_{k=2}^{k=2n+1} \frac{(2n+1)2n \dots (2n-k+2)}{1 \cdot 2 \dots k} \cdot \frac{1}{k} (-1)^{k-1} \sum_{p=1}^{p=k-1} p^{2n} \quad (3)$$

Такъ, при $n=1$ имѣемъ по этой формулѣ:

$$B_2 = -\frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} (1^2 + 2^2) = \frac{1}{6}.$$

ГЛАВА IV.

Выраженіе Бернуллиевыхъ чиселъ при помощи чиселъ Моргана и чиселъ, имъ аналогичныхъ.

§ 25. Формулы В. Г. Имшенецкаго.

Въ предыдущей главѣ мы видѣли, что конечныя разности Б. функций выражаются наипростѣйшимъ образомъ сравнительно со всѣми другими функциями, именно:

$$\Delta \varphi_n(x) = x^n; \Delta^{m+1} \varphi_n(x) = \Delta^m x^n; (a)$$

это даетъ возможность съ большимъ удобствомъ примѣнять, при изслѣдованіи различныхъ вопросовъ, связанныхъ съ теоріею этихъ функций, начала исчисленія конечныхъ разностей. Пользуясь такимъ методомъ, можно получить рядъ выраженій Бернуллиевыхъ чиселъ чрезъ числа Моргана и изучать тѣ и другія числа во взаимной связи. Три формулы подобнаго рода были предложены академикомъ В. Г. Имшенецкимъ. Первую изъ нихъ можно получить, рассматривая выраженіе 1-й производной отъ функции $\varphi_{2n}(x)$ чрезъ рядъ послѣдовательныхъ разностей той-же функции; его мы получимъ, основываясь на извѣстномъ символическомъ равенствѣ:

$$\frac{d}{dx} u_x = l(1 + \Delta)u_x$$

т. е.

$$u_x' = \Delta u_x - \frac{\Delta^2 u_x}{2} + \frac{\Delta^3 u_x}{3} - \dots$$

Полагая $u_x = \varphi_{2n}(x)$, имеем по (а):

$$\begin{aligned} \varphi_{2n}'(x) &= 2n\varphi_{2n-1}(x) + B_{2n} = \\ &= \left\{ x^{2n} - \frac{\Delta x^{2n}}{2} + \frac{\Delta^2 x^{2n}}{3} - \dots + \frac{\Delta^{2n} x^{2n}}{2n} \right\} \end{aligned}$$

При $x=0$ это дает:

$$B_{2n} = \left\{ -\frac{\Delta 0^{2n}}{2} + \frac{\Delta^2 0^{2n}}{3} - \dots + \frac{\Delta^{2n} 0^{2n}}{2n+1} \right\} \quad (1)$$

При вычислении по этой формуле Б. чиселъ съ небольшими указателями, мы можемъ пользоваться известной таблицей чиселъ вида $\Delta^m 0^k$, данной Морганомъ.

Ту же формулу, равно какъ и другія подобныя выражения, можно получить, пользуясь свойствами факторіальныхъ функций, т. е. функций вида:

$$x^{(m)} = x(x-1)\dots(x-m+1).$$

Извѣстно, что всякая функция $f(x)$ можетъ быть разложена по этимъ функциямъ при помощи формулы:

$$f(x) = f(0) + \Delta f(0)x^{(1)} + \Delta^2 f(0)\frac{x^{(2)}}{1.2} + \dots$$

Разлагая, поэтому, $\varphi_{2n}(x)$ по факторіальнымъ функциямъ, имеемъ:

$$\begin{aligned} \varphi_{2n}(x) &= \Delta 0^{2n} \frac{x(x-1)}{1.2} + \Delta^2 0^{2n} \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3} + \dots \\ &\dots + \Delta^{2n} 0^{2n} \frac{x(x-1)\dots(x-2n)}{1.2\dots(2n+1)} \end{aligned} \quad (b)$$

Раздѣливъ обѣ части этого выражения на x и взявъ предѣлъ частнаго при $x=0$, находимъ:

$$\lim \left[\frac{\varphi_{2n}(x)}{x} \right]_{x=0} = \varphi'_{2n}(x)_{x=0} = B_{2n} =$$

$$= \left\{ \frac{\Delta 0^{2n}}{2} + \frac{\Delta^2 0^{2n}}{3} + \dots + \frac{\Delta^{2n} 0^{2n}}{2n+1} \right\}$$

Другое выражение для B_{2n} получимъ, раздѣливъ обѣ части ур. (b) на $(x-1)$ и положивъ затѣмъ $x=1$. Найдемъ:

$$\left\{ \frac{\varphi_{2n}(x)}{x-1} \right\}_{x=1} = \varphi'_{2n}(x)_{x=1} = B_{2n} =$$

$$= \left[\frac{\Delta 0^{2n}}{1.2} - \frac{\Delta^2 0^{2n}}{2.3} + \frac{\Delta^3 0^{2n}}{3.4} - \dots - \frac{\Delta^{2n} 0^{2n}}{2n(2n+1)} \right] \quad (2)$$

3-ю формулу академика Имшенецкаго получимъ, разложивъ по факторіальнымъ функціямъ Б. функцію $\varphi_{2n-1}(x)$ и сдѣлавъ потомъ $x = \frac{1}{2}$. Дѣйствительно, имѣемъ:

$$\varphi_{2n-1}(x) = \Delta 0^{2n-1} \frac{x(x-1)}{1.2} + \Delta^2 0^{2n-1} \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3} + \dots$$

$$+ \dots + \Delta^{2n-1} 0^{2n-1} \frac{x(x-1) \dots (x-2n+1)}{1.2 \dots 2n}$$

При $x = \frac{1}{2}$ находимъ:

$$\varphi_{2n-1}\left(\frac{1}{2}\right) = -B_{2n} \frac{(2^{2n}-1)}{2n \cdot 2^{2n-1}} =$$

$$= \Delta 0^{2n-1} \frac{\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2}}{1.2} + \Delta^2 0^{2n-1} \frac{\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2} \cdot -\frac{3}{2}}{1.2.3} + \dots$$

$$+ \dots + \Delta^{2n-1} 0^{2n-1} \frac{\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2} \cdot -\frac{3}{2} \dots \left[\frac{1}{2} - (2n-2) \right] \left[\frac{1}{2} - (2n-1) \right]}{1.2 \dots 2n}$$

откуда

$$B_{2n} = \frac{2n \cdot 2^{2n-1}}{2^{2n}-1} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \Delta 0^{2n-1} - \frac{1.1.3}{2.4.6} \Delta^2 0^{2n-1} + \dots \right.$$

$$\left. + \dots + \frac{1.1.3 \dots (4n-5)(4n-3)}{2.4.6 \dots (4n-2)4n} \Delta^{2n-1} 0^{2n-1} \right] \quad (3)$$

§ 26. Распространение предыдущаго метода.

Можно еще получить разложение Б. функции $\varphi_n(x)$ по факториальным функциям въ иномъ видѣ и воспользоваться имъ для получения соответствующихъ выражений Б. чиселъ. Для этого воспользуемся формулой исчисления кон. разностей:

$$u_{t+x} = u_t + x \cdot \Delta u_t + \frac{x(x-1)}{1.2} \Delta^2 u_t + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3} \Delta^3 u_t + \dots \quad (A)$$

Именно, полагая $u_t = t^{2n+1}$ и замѣняя x чрезъ $-x$, получимъ:

$$(t-x)^{2n+1} = t^{2n+1} - x \Delta t^{2n+1} + \frac{x(x+1)}{1.2} \Delta^2 t^{2n+1} - \\ - \frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3} \Delta^3 t^{2n+1} - \dots$$

При $t=0$, найдемъ:

$$-x^{2n} = -\Delta 0^{2n+1} + \frac{(x+1)}{1.2} \Delta^2 0^{2n+1} - \frac{(x+1)(x+2)}{1.2.3} \Delta^3 0^{2n+1} - \dots$$

Взявъ отъ обѣихъ частей интегралъ по конечнымъ разностямъ въ предѣлахъ отъ 0 до x , находимъ:

$$\sum x^{2n} = \frac{x}{1} \Delta 0^{2n+1} - \frac{(x+1)x}{2.1.2} \Delta^2 0^{2n+1} + \frac{(x+2)(x+1)x}{3.1.2.3} \Delta^3 0^{2n+1} - \dots$$

но

$$\sum x^{2n} = \varphi_{2n}(x) = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + B_1 x^{2n} + \dots + B_{2n} x;$$

сравненіе коэффициентовъ при x въ 1-й степени даетъ:

$$B_{2n} = \frac{\Delta 0^{2n+1}}{1} - \frac{\Delta^2 0^{2n+1}}{2^2} + \dots + \frac{\Delta^{2n+1} 0^{2n+1}}{(2n+1)^2} \quad (1)$$

Находя подобное же разложение для $\varphi_{2n-1}(x)$, имѣемъ, положивъ въ (A) $u_t = t^{2n}$ и замѣняя x чрезъ $-x$:

$$(t-x)^{2n} = t^{2n} - x \Delta t^{2n} + \frac{x(x+1)}{1.2} \Delta^2 t^{2n} - \dots$$

При $t=0$ имѣемъ отсюда:

$$x^{2n-1} = -\Delta 0^{2n} + \frac{(x+1)}{1.2} \Delta^2 0^{2n} - \frac{(x+1)(x+2)}{1.2.3} \Delta^3 0^{2n} + \dots$$

Беря отъ обѣихъ частей интегралъ по кон. разностямъ отъ 0 до x , найдемъ:

$$\sum x^{2n-1} = \varphi_{2n-1}(x) = -\frac{x}{1} \Delta 0^{2n} + \frac{x(x+1)}{1.2} \cdot \frac{1}{2} \Delta^2 0^{2n} - \frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3} \cdot \frac{1}{3} \Delta^3 0^{2n} + \dots$$

Полагая теперь $x = \frac{1}{2}$, получимъ:

$$-B_{2n} \frac{(2^{2n}-1)}{2n \cdot 2^{2n-1}} = -\frac{1}{2} \Delta 0^{2n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Delta^2 0^{2n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{3} \Delta^3 0^{2n} + \dots$$

и отсюда

$$B_{2n} = \frac{2n \cdot 2^{2n-1}}{2^{2n}-1} \left[\frac{1}{2} \Delta 0^{2n} - \frac{1.3}{1.2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta^2 0^{2n}}{2^2} + \frac{1.3.5}{1.2.3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\Delta^3 0^{2n}}{2^3} - \dots - \frac{1.3 \dots (4n-3)(4n-1)}{1.2 \dots 2n} \cdot \frac{1}{2n} \cdot \frac{\Delta^{2n} 0^{2n}}{2^{2n}} \right] \quad (2)$$

§ 27. Приложенія формулы Гершеля.

Кромѣ Бернуллиевыхъ функцій, для полученія выраженій Б. чиселъ въ числахъ Моргана, можно воспользоваться еще нѣкоторыми функціями отъ e^x ; которыя допускаютъ разложеніе въ рядъ съ Бернуллиевыми коэффициентами, примѣняя въ нимъ формулу Гершеля. Какъ извѣстно, если положимъ:

$$f(e^t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \dots + A_n t^n + \dots$$

то, по этой формулѣ, имѣемъ такое символическое выраженіе коэффициента A_n :

$$A_n = \frac{f(1+\Delta)0^n}{1.2 \dots n}$$

и слѣдовательно:

$$f(e^t) = f(1+\Delta) \cdot \left[1 + 0 \cdot t + \frac{0^2 t^2}{1 \cdot 2} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{0^n t^n}{1 \cdot 2 \dots n} + \dots \right] = f(1+\Delta) \cdot e^{0t}$$

Чтобы при помощи этой формулы найти выражение B_n числа, применимъ ее къ извѣстному разложенію:

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 + B_1 x + B_2 \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \dots + B_{2n} \frac{x^{2n}}{1 \cdot 2 \dots 2n} + \dots$$

Въ этомъ случаѣ имѣемъ:

$$f(e^x) = \frac{l(e^x)}{e^x - 1} = \frac{l(1+\Delta)}{\Delta} e^{0x} = \\ = \frac{l(1+\Delta)}{\Delta} \left(1 + 0 \cdot x + \frac{0^2 x^2}{1 \cdot 2} + \dots \right)$$

Отсюда

$$B_{2n} = \frac{l(1+\Delta)}{\Delta} 0^{2n} = \frac{1}{\Delta} \left(\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \dots \right) 0^{2n} = \\ = \left(-\frac{\Delta 0^{2n}}{2} + \frac{\Delta^2 0^{2n}}{3} - \dots + \frac{\Delta^{2n} 0^{2n}}{2n+1} \right)$$

—выраженіе, которое мы ужъ имѣли.

Новое выраженіе для B_{2n} получимъ, применивъ формулу Гершеля къ другому извѣстному разложенію:

$$\frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{2} - B_1 \frac{(2^1 - 1)}{1 \cdot 2} x - \dots - B_{2n} \frac{(2^{2n} - 1)}{1 \cdot 2 \dots 2n} x^{2n-1} - \dots$$

Здѣсь

$$f(e^x) = \frac{1}{(1+\Delta) + 1} \cdot e^{0 \cdot x} = \frac{1}{2+\Delta} e^{0 \cdot x} = \\ = \frac{1}{2+\Delta} \left[1 + 0 \cdot x + \frac{0^2 x^2}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{0^{2n-1} x^{2n-1}}{1 \cdot 2 \dots (2n-1)} + \dots \right]$$

слѣдовательно

$$B_{2n} = -\frac{2n}{2^{2n} - 1} \cdot \frac{1}{2+\Delta} 0^{2n-1} = \\ = \frac{2n}{2^{2n} - 1} \left(\frac{\Delta 0^{2n-1}}{2^1} - \frac{\Delta^2 0^{2n-1}}{2^2} + \dots + \frac{\Delta^{2n-1} 0^{2n-1}}{2^{2n}} \right)$$

6 e

§ 28. Нѣкоторыя преобразованія полученныхъ формулъ.

Числа вида $\Delta^n 0^n$, чрезъ которыя мы выражаемъ въ этой главѣ Б. числа, допускаютъ между собой различнаго рода соотношенія и зависимости, сообразно съ которыми всѣ полученные нами выраженія Б. чиселъ могутъ быть преобразованы. Однако, чтобы не заходить далеко въ специальную область изслѣдованія чиселъ Моргана, мы рассмотримъ лишь нѣсколько простыхъ случаевъ, къ которымъ приводитъ формула Гершеля.

Пользуясь этой формулой, докажемъ, прежде всего, справедливость символическаго равенства

$$f(1+\Delta)0^n = (1+\Delta)f'(1+\Delta)0^{n-1}$$

или, замѣняя $(1+\Delta)$ чрезъ E :

$$f(E)0^n = Ef'(E)0^{n-1}$$

Для этого разложимъ то и другое выраженіе въ ряды:

$$f(E)0^n = \left\{ f(0) + Ef'(0) + \dots + \frac{E^r}{1.2\dots r} f^{(r)}(0) + \dots \right\} 0^n$$

$$Ef'(E)0^{n-1} = E \left\{ f'(0) + Ef''(0) + \dots + \frac{E^{r-1}}{1.2\dots(r-1)} f^{(r)}(0) + \dots \right\} 0^{n-1}$$

Чтобы оба разложенія были равны, необходимо, чтобы ихъ соответствующіе члены были равны, т.-е. чтобы:

$$E^r 0^n = r E^{r-1} 0^{n-1}$$

Но, по формулѣ Гершеля:

$$E^r 0^n = (1+\Delta)^r 0^n = A_n 1.2\dots n$$

$$E^r 0^{n-1} = (1+\Delta)^r 0^{n-1} = A_{n-1} 1.2\dots(n-1)$$

гдѣ A_{n-1} и A_n опредѣляются изъ разложенія:

$$e^{rt} = A_0 + A_1 t + \dots + A_{n-1} t^{n-1} + A_n t^n + \dots$$

т.-е.

$$A_{n-1} = \frac{r^{n-1}}{1.2\dots(n-1)}; \quad A_n = \frac{r^n}{1.2\dots n};$$

Слѣдовательно

$$E^r 0^n = r^n, \quad E^r 0^{n-1} = r^{n-1}$$

и значить, дѣйствительно,

$$E^n 0^n = r E^n 0^{n-1}$$

и потому

$$f(1+\Delta) 0^n = (1+\Delta) f'(1+\Delta) 0^{n-1}$$

или, полагая

$$f(1+\Delta) = V(\Delta)$$

вообще

$$V(\Delta) 0^n = (1+\Delta) V'(\Delta) 0^{n-1} \quad (\text{I})$$

Полагая въ этой формулѣ $V(\Delta) = \Delta^m$, находимъ такую связь между числами Моргана:

$$\Delta^m 0^n = (1+\Delta) m \Delta^{m-1} 0^{n-1};$$

или

$$\Delta^m 0^n = m(\Delta^{m-1} 0^{n-1} + \Delta^m 0^{n-1})$$

$$\Delta^{m-1} 0^{n-1} = \frac{\Delta^m 0^n}{m} - \Delta^m 0^{n-1}$$

По этой формулѣ можетъ быть преобразовано любое изъ полученныхъ нами выраженій для Б. чиселъ. Такъ, примѣняя ее, напр ко 2-й формулѣ Имшенецкаго (§ 25, 2) находимъ:

$$B_{2n} = \left\{ \left[\frac{\Delta^2 0^{2n+1}}{1 \cdot 2^2} - \frac{\Delta^3 0^{2n+1}}{2 \cdot 3^2} + \dots - \frac{\Delta^{2n+1} 0^{2n+1}}{2n(2n+1)^2} \right] - \left[\frac{\Delta^2 0^{2n}}{1 \cdot 2} - \frac{\Delta^3 0^{2n}}{2 \cdot 3} + \dots - \frac{\Delta^{2n} 0^{2n}}{(2n-1)2n} \right] \right\}$$

Къ полученному выраженію можно опять примѣнить то же самое преобразованіе и т. д., такъ что одно и то-же Б. число можетъ быть до бесконечности разнообразно представляемо чрезъ числа вида $\Delta^m 0^n$, или, иначе, число B_{2n} можно различнѣйшимъ образомъ представить въ функціи его указателя, ибо соотвѣтствующія числа Моргана выражаются вполне опредѣленно чрезъ $2n$.

Но формула (I) даетъ мѣсто еще и для иныхъ преобразованій.

Изъ нея находимъ:

$$V'(\Delta) 0^n - d\Delta = \frac{V(\Delta) 0^n}{1+\Delta} d\Delta$$

$$V(\Delta) 0^{n-1} = \int \frac{V(\Delta) 0^n}{1+\Delta} d\Delta \quad (\text{II})$$

Такъ, мы нашли въ пред. §:

$$B_{2n} = - \frac{2n}{2^{2n}-1} \cdot \frac{1}{2+\Delta} 0^{2n-1};$$

на основаніи ф. (II) имѣемъ:

$$\frac{1}{2+\Delta} 0^{2n-1} = \int \frac{1}{2+\Delta} \cdot \frac{1}{1+\Delta} d\Delta \cdot 0^{2n} = \left\{ l(1+\Delta) - l\left(1 + \frac{\Delta}{2}\right) \right\} 0^{2n}.$$

Но

$$l(1+\Delta) 0^{2n} = A_{2n} \cdot 1 \cdot 2 \dots 2n$$

гдѣ A_{2n} — коэффициентъ при t^{2n} въ разложеніи $l(e^t)$; но $l(e^t) = t$, поэтому A_{2n} и $l(1+\Delta)$ обращаются въ 0 и

$$\frac{1}{2+\Delta} 0^{2n-1} = -l\left(1 + \frac{\Delta}{2}\right) 0^{2n}$$

такъ что имѣемъ новое выраженіе для Б. числа

$$B_{2n} = \frac{2n}{2^{2n}-1} l\left(1 + \frac{\Delta}{2}\right) 0^{2n} = \frac{2n}{2^{2n}-1} \left(\frac{\Delta 0^{2n}}{2} - \frac{\Delta^2 0^{2n}}{2 \cdot 2^2} + \frac{\Delta^3 0^{2n}}{3 \cdot 2^3} - \dots - \frac{\Delta^{2n} 0^{2n}}{2n \cdot 2^{2n}} \right)$$

Напр.

$$B_4 = \frac{4}{15} \left(\frac{1}{2} - \frac{14}{8} + \frac{36}{24} - \frac{24}{64} \right) = -\frac{1}{30}.$$

62

Значит

§ 29. Выраженіе Бернуллиевыхъ чиселъ въ числахъ вида $\Delta^m(1^n)$.

Кромѣ чиселъ Моргана, Б. числа могутъ быть выражены еще при помощи чиселъ вида $\Delta^m(1^n)$; такого рода формула была предложена Каталаною. Прежде чѣмъ ее вывести, замѣтимъ, что общее выраженіе числа $\Delta^m(1^n)$ получается изъ известной формулы

$$\Delta^m x^n = (x+m)^n - m(x+m-1)^n + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} (x+m-2)^n - \dots$$

$$+ (-1)^{m-1} m(x+1)^n + (-1)^m x^n$$

и будетъ

$$\Delta^m(1^n) = (m+1)^n - m \cdot m^n + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} (m-1)^n - \dots$$

$$+ (-1)^{m-1} m 2^n + (-1)^m 1^n$$

$$\Delta^m 0^n = m^n - m(m-1)^n + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} (m-2)^n - \dots = m! = m$$

т.-е. равенство (I); кроме того, такъ какъ $M_p^{(p-1)}=1$ и

$$\frac{\Delta^{p-1}(1^{p-1})}{1.2 \dots (p-1)} = 1,$$

то, очевидно, что числа $M_p^{(k)}$ и $\frac{\Delta^k(1^{p-1})}{1.2 \dots k}$ равнозначущи. Итакъ:

$$\begin{aligned} x^p = & x^{(1)} + \frac{\Delta^1(1^{p-1})}{1} x^{(2)} + \frac{\Delta^2(1^{p-1})}{1.2} x^{(3)} + \dots \\ & \dots + \frac{\Delta^k(1^{p-1})}{1.2 \dots k} x^{(k+1)} + \dots + \frac{\Delta^{p-2}(1^{p-1})}{1.2 \dots (p-2)} x^{(p-1)} + x^{(p)}. \end{aligned}$$

поэтому:

$$\begin{aligned} x^{2n} = & x^{(1)} + \frac{\Delta^1(1^{2n-1})}{1} x^{(2)} + \frac{\Delta^2(1^{2n-1})}{1.2} x^{(3)} + \dots \\ & \dots + \frac{\Delta^k(1^{2n-1})}{1.2 \dots k} x^{(k+1)} + \dots + x^{(2n)}. \end{aligned}$$

Взявъ интеграль по конечнымъ разностямъ, получаемъ:

$$\begin{aligned} \sum x^{2n} = & \frac{x^{(2)}}{2} + \frac{\Delta(1^{2n-1})}{1} \frac{x^{(3)}}{3} + \frac{\Delta^2(1^{2n-1})}{1.2} \frac{x^{(4)}}{4} + \dots \\ & + \frac{\Delta^{2n-2}(1^{2n-1})}{1.2 \dots (2n-2)} \frac{x^{(2n)}}{2n} + \frac{\Delta^{2n-1}(1^{2n-1})}{1.2 \dots (2n-1)} \frac{x^{(2n+1)}}{2n+1} + C \quad (\text{III}) \end{aligned}$$

Предѣлами интегрированія при нахожденіи выраженія для B_{2n} можемъ взять какъ 0 и x , такъ и 0 и $(x+1)$; дѣйствительно, въ 1-мъ случаѣ получимъ $\varphi_{2n}(x)$, а во 2-мъ $[\varphi_{2n}(x) + x^{2n}]$, но, какъ мы знаемъ, они отличаются лишь коэффициентами при x^{2n} , а при x въ 1-й степени коэффициентъ въ томъ и другомъ выраженіи будетъ B_{2n} . Это даетъ возможность получить 2 формулы для B_{2n} . Именно, взявъ предѣлами (III) 0 и x , имѣемъ:

$$\begin{aligned} \varphi_{2n}(x) = & \frac{x(x-1)}{2} + \frac{x(x-1)(x-2)}{3} \frac{\Delta(1^{2n-1})}{1} + \dots \\ & + \frac{x(x-1) \dots (x-2n+1)}{2n} \frac{\Delta^{2n-2}(1^{2n-1})}{1.2 \dots (2n-2)} + \\ & + \frac{x(x-1) \dots (x-2n)}{(2n+1)} \frac{\Delta^{2n-1}(1^{2n-1})}{1.2 \dots (2n-1)}, \end{aligned}$$

откуда

$$B_{2n} = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\Delta(1^{2n-1}) - \frac{3}{4}\Delta^2(1^{2n-1}) + \dots + \frac{2n}{2n+1}\Delta^{2n-1}(1^{2n-1}) \quad (1)$$

Когда же возьмемъ предѣлами 0 и $(x+1)$, получимъ:

$$\begin{aligned} \varphi_{2n}(x) + x^{2n} &= \frac{(x+1)x}{2} + \frac{(x+1)x(x-1)}{3}\Delta(1^{2n-1}) + \\ &+ \frac{(x+1)x(x-1)(x-2)}{4}\frac{\Delta^2(1^{2n-1})}{1.2} + \dots \\ &\dots + \frac{(x+1)x\dots(x-2n+1)}{2n+1}\frac{\Delta^{2n-1}(1^{2n-1})}{1.2\dots(2n-1)} \end{aligned}$$

и отсюда

$$B_{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Delta(1^{2n-1}) + \frac{1}{4}\Delta^2(1^{2n-1}) - \dots - \frac{1}{2n+1}\Delta^{2n-1}(1^{2n-1}) \quad (2)$$

Послѣдняя формула и была предложена (съ инымъ выводомъ) Каталаноу; имъ же вычислена небольшая таблица значеній для чиселъ вида $\Delta^m(1^n)$. Приводимъ изъ нея значенія этихъ чиселъ до $\Delta^6(1^6)$.

	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5	Δ^6
1^1	1					
1^2	3	2				
1^3	7	12	6			
1^4	15	50	60	24		
1^5	31	180	390	360	120	
1^6	63	602	2100	3360	2520	720

Числа
p q

Такъ, напр. по формулѣ Каталана

$$B_6 = \frac{1}{2} - \frac{31}{3} + \frac{180}{4} - \frac{390}{5} + \frac{360}{6} - \frac{120}{7} = \frac{1}{42},$$

$$\frac{1}{2} - \frac{63}{3} + \frac{602}{4} - \frac{2100}{5} + \frac{3360}{6} - \frac{2520}{7} + \frac{720}{8} = 0$$

а по формулѣ (1)

$$B_6 = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot 31 - \frac{3}{4} \cdot 180 + \frac{4}{5} \cdot 390 - \frac{5}{6} \cdot 360 + \frac{6}{7} \cdot 120 = \frac{1}{42}.$$

§ 30. Связь чиселъ Бернулли съ гармоническимъ рядомъ.

Исходя изъ формулы Каталана, можно получить особаго рода формулу, предложенную Бауэромъ и устанавливающую зависимость между рядомъ чиселъ Бернулли и рядомъ гармоническимъ.

Выраженіе, данное Каталаномъ, въ общемъ случаѣ можетъ быть представлено такъ:

$$B_n = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i+1} (-1)^{i-1} \Delta^{i-1} (1^{n-1})$$

или, полагая для краткости

$$(-1)^i \Delta^i (1^n) = N_i^{(n)},$$

имѣемъ:

$$B_n = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i+1} N_{i-1}^{(n-1)} \quad (n > 1). \quad (1)$$

Основываясь на соотношеніи (I) предыдущаго §, заключаемъ, что формула, связывающая 3 числа вида N будетъ:

$$N_i^{(n)} = (i+1) N_i^{(n-1)} - i N_{i-1}^{(n-1)} \quad (2)$$

Если подъ $f(i)$ будемъ разумѣть такую функцію, которая не обращается въ бесконечность при $i=0$, то изъ (2) слѣдуетъ:

$$\sum_{i=0}^{i=n} f(i) N_i^{(n)} = \sum_{i=0}^{i=n-1} (i+1) [f(i) - f(i+1)] N_i^{(n-1)}.$$

Будемъ означать символомъ $\Delta f(i)$ здѣсь и далѣе:

$$\Delta f(i) = f(i) - f(i+1)$$

тогда:

$$\sum_{i=0}^{i=n} f(i) N_i^{(n)} = \sum_{i=0}^{i=n-1} (i+1) \Delta f(i) N_i^{(n-1)}$$

повторяя то-же преобразование, имѣемъ:

$$\sum_{i=0}^{i=n} f(i) N_i^{(n)} = \sum_{i=0}^{i=n-2} (i+1) \Delta(i+1) \Delta f(i) N_i^{(n-2)}$$

послѣ же n -кратнаго преобразованія, причемъ будемъ означать чрезъ $D^n f(i)$ n -ю разность:

$$\Delta(i+1) \Delta(i+1) \Delta \dots \Delta(i+1) \Delta f(i)$$

найдемъ:

$$\sum_{i=0}^{i=n} f(i) N_i^{(n)} = [D^n f(i)]_{i=0} \quad (3)$$

Давая здѣсь $f(i)$ частныя значенія, можно вывести различныя интересныя свойства чиселъ N , такъ, полагая $f(i) = \text{const.}$, найдемъ:

$$\sum_{i=0}^{i=n} N_i^{(n)} = 0. \quad (4)$$

Теперь найдемъ выраженіе $D^n f(i)$ чрезъ $\Delta f(i)$; для этого применимъ формулу:

$$R_i S_i - R_{i+1} S_{i+1} = R_i (S_i - S_{i+1}) + S_i (R_i - R_{i+1}) - (R_i - R_{i+1})(S_i - S_{i+1})$$

или

$$\Delta R_i S_i = R_i \Delta S_i + S_i \Delta R_i - \Delta R_i \Delta S_i$$

По этой формулѣ, замѣчая, что

$$\Delta(i+1) = -1$$

и

$$D^n f(i) = \Delta[(i+1) D^{n-1} f(i)]$$

находимъ:

$$D^n f(i) = -D^{n-1} f(i) + (i+2) \Delta D^{n-1} f(i)$$

$$D^{n-1} f(i) = -D^{n-2} f(i) + (i+2) \Delta D^{n-2} f(i)$$

$$D^2 f(i) = -D^1 f(i) + (i+2) \Delta D^1 f(i)$$

но

$$D^1 f(i) = \Delta f(i)$$

поэтому имѣемъ:

$$D^2 f(i) = -\Delta f(i) + (i+2) \Delta^2 f(i)$$

$$D^3 f(i) = -D^2 f(i) + (i+2) \Delta D^2 f(i) =$$

$$= \Delta f(i) - 3(i+2) \Delta^2 f(i) + (i+2)(i+3) \Delta^3 f(i)$$

такимъ образомъ убѣждаемся, что вообще $D^n f(i)$ должно имѣть видъ:

$$D^n f(i) = (-1)^{n-1} [\Delta f(i) + A_1^{(n)}(i+2) \Delta^2 f(i) + \dots \\ \dots + A_{n-1}^{(n)}(i+2)(i+3) \dots (i+n) \Delta^n f(i)]$$

при этомъ коэффициентъ $(-1)^{n-1} A_{n-1}^{(n)}$ равенъ 1; прочіе-же коэффициенты суть цѣлыя числа, которыя можно вычислить. Чтобы найти законъ, какому они слѣдуютъ въ своемъ образованіи, сравнимъ коэффициенты при равностяхъ одного и того же порядка въ двухъ выраженіяхъ для $D^{n+1} f(i)$, изъ которыхъ первое получимъ чрезъ замѣну въ $D^n f(i)$ n —чрезъ $(n+1)$, а 2-е найдемъ непосредственно, сдѣлавъ надъ $D^n f(i)$ еще разъ операцію D . Первое дастъ:

$$D^{n+1} f(i) = (-1)^n [\Delta f(i) + A_1^{(n+1)}(i+2) \Delta^2 f(i) + \dots \\ \dots + A_k^{(n+1)}(i+2) \dots (i+k+1) \Delta^{k+1} f(i) + \dots \\ \dots + A_n^{(n+1)}(i+2) \dots (i+n+1)] \quad (a)$$

а второе:

$$D^{n+1} f(i) = -D^n f(i) + (i+2) \Delta D^n f(i) = \\ = (-1)^n [\Delta f(i) + A_1^{(n)}(i+2) \Delta^2 f(i) + \dots \\ \dots + A_k^{(n)}(i+2) \dots (i+k+1) \Delta^{k+1} f(i) + \dots \\ \dots + A_{n-1}^{(n)}(i+2) \dots (i+n) \Delta^n f(i)] + (i+2) \Delta D^n f(i) \quad (b)$$

Сравнивая коэффициенты въ (а) и (b) при $\Delta^{k+1}f(i)$, найдемъ по упрощеніи:

$$A_k^{(n+1)} = (k+1)A_k^{(n)} - A_{k-1}^{(n)} \quad (c)$$

сравнивая же члены съ $\Delta^{n+1}f(i)$, получимъ:

$$A_n^{(n+1)} = -A_{n-1}^{(n)} = (-1)^n.$$

Полученныя соотношенія между числами (А) позволяютъ убѣдиться, что

$$A_k^{(n+1)} = \frac{N_k^{(n)}}{1.2\dots k} \quad (d)$$

дѣйствительно, въ этомъ предположеніи, соотношеніе (с) приводитъ къ равенству (2), сверхъ того, должно имѣть мѣсто равенство:

$$A_n^{(n+1)} = \frac{N_n^{(n)}}{1.2\dots n}$$

но

$$A_n^{(n+1)} = (-1)^n; N_n^{(n)} = (-1)^n.1.2\dots n$$

и потому сдѣланное допущеніе справедливо.

Поэтому окончательно получимъ:

$$D^n f(i) = (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(i+2)(i+3)\dots(i+k)}{1.2\dots(k-1)} N_{k-1}^{(n-1)} \Delta^k f(i). \quad (4)$$

Эта формула при частныхъ значеніяхъ $f(i)$ съ успѣхомъ могла бы быть приложена къ раскрытію различныхъ свойствъ чиселъ $N_k^{(n)}$, но мы, не останавливаясь на этомъ, воспользуемся ею, чтобы получить изъ нея выраженія Б. чиселъ. Именно, положимъ:

$$f(i) = \frac{1}{i+1}$$

тогда:

$$\Delta f(i) = \frac{1}{(i+1)(i+2)}, \quad \Delta^k f(i) = \frac{1.2\dots k}{(i+1)(i+2)\dots(i+k+1)}$$

и потому:

$$D^n \left(\frac{1}{i+1} \right) = (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{(i+k)(i+k+1)} N_{k-1}^{(n-1)}$$

или

$$D^n\left(\frac{1}{i+1}\right) = (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i+k+1}\right) N_{k-1}^{(n-1)}$$

но, по (4):

$$\sum_{k=1}^{k=n} N_{k-1}^{(n-1)} = \sum_{k=0}^{k=n-1} N_k^{(n-1)} = 0,$$

и следовательно:

$$D^n\left(\frac{1}{i+1}\right) = (-1)^n \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{i+k+1} N_{k-1}^{(n-1)}$$

$$\left[D^n\left(\frac{1}{i+1}\right) \right]_{i=0} = (-1)^n \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k+1} N_{k-1}^{(n-1)}$$

Отсюда, на основании (1), находимъ:

$$\left[D^n\left(\frac{1}{i+1}\right) \right]_{i=0} = B_n \quad (5)$$

эта формула и была дана Бауэромъ. По ней находимъ:

$$B_1 = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6},$$

$$B_2 = 1 \cdot \left[1 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \right] -$$

$$- 2 \cdot \left[2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - 3 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \right] = 0.$$

и т. д., вообще, если напишемъ гармоническій рядъ:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

возьмемъ отсюда разности, умножимъ ихъ соответственно на числа 1, 2, 3... затѣмъ опять образуемъ разности отъ полученныхъ чиселъ и т. д., то начиная со 2-го ряда разностей, первые члены полученныхъ рядовъ разностей будутъ представлять послѣдовательно Бернуллиевы числа, какъ это видно изъ прилагаемой таблицы:

	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
I		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$
		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
II	$B_2 =$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	
		$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{4}{30}$	
III	$B_3 =$	0	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$		
		0	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{20}$		
IV	$B_4 =$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{60}$			
		$-\frac{1}{30}$	$-\frac{1}{30}$			
V			$B_5 =$	0		

Г Л А В А V.

Исслѣдованіе Бернуллиевыхъ чиселъ при помощи метода символическаго обозначенія.

Всѣ полученныя нами до сихъ поръ соотношенія между Бернуллиевыми числами и разложенія функцій въ ряды съ Бернуллиевыми коэффициентами, равно какъ и безчисленное множество новыхъ подобныхъ выраженій, могутъ быть получены и, притомъ, часто въ весьма изящномъ видѣ, изъ нѣкоторыхъ общихъ фор-

муль символическаго характера. Такого рода формулы были даны въ недавнее время Блиссардомъ *) и Люка **), независимо другъ отъ друга примѣнившими къ изученію чиселъ Я. Бернулли методъ символическаго обозначенія. Эти ученые пользовались, однако, не тѣмъ общеизвѣстнымъ символическимъ методомъ, который часто примѣняется въ дифференціальномъ исчисленіи и исчисленіи конечныхъ разностей и которымъ мы, напр., пользовались отчасти въ предыдущей главѣ: символическое означеніе было ими примѣнено къ самимъ количествамъ, а не къ дѣйствіямъ надъ ними. Именно, если имѣемъ рядъ количествъ:

$$U_0, U_1, U_2, \dots$$

подчиненныхъ какой-либо опредѣленной зависимости между собой, то эти количества означаются однимъ общимъ символомъ U , и соотношеніе между ними представляется въ видѣ нѣкоторой опредѣленной операціи надъ U , какъ еслибы оно было алгебраическимъ количествомъ, такъ что U_n представляется чрезъ U^n . Надъ полученной такимъ образомъ функціей U могутъ быть совершаемы какія-либо дальнѣйшія операціи: дифференцированіе, разложеніе въ рядъ и пр., окончательный же результатъ получимъ, перейдя отъ символическаго выраженія къ дѣйствительному, т.-е. замѣнивъ опять въ получившейся формулѣ показатели при U индексами. Такимъ образомъ, внѣшнимъ отличіемъ символическихъ выраженій отъ дѣйствительныхъ будетъ служить то, что входящія въ нихъ количества, которыя, притомъ, мы всегда будемъ означать большими буквами, не будутъ имѣть никакихъ индексовъ.

Разсмотримъ два случая подобнаго употребленія символическаго обозначенія, которыми мы часто будемъ пользоваться.

1) Пусть имѣемъ нѣкоторый многочленъ съ биноміальными коэффициентами:

$$f(x) = U_0 x^n + \frac{n}{1} U_1 x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} U_2 x^{n-2} + \dots + U_n x^0.$$

*) *Blissard*. Theory of generic equations. Quarterly Journal, IV.

**) *Lucas*. Théorie des nombres.

Примѣняя символическое обозначеніе, можемъ написать его въ сжатой формѣ:

$$f(x) = (x + U)^n.$$

Можно замѣтить непосредственно, что операція дифференцированія, примѣненная къ функціи въ такой символической формѣ, дастъ ея дѣйствительную производную:

$$f'(x) = n U_0 x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1} U_1 x^{n-2} + \dots = n(x + U)^{n-1}$$

точно также

$$f^{(p)}(x) = n(n-1) \dots (n-p+1)(x + U)^{n-p}$$

2. Подобнымъ же образомъ выраженіе:

$$f(x) = U_0 + \frac{U_1 x}{1} + \frac{U_2 x^2}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{U_n x^n}{1 \cdot 2 \dots n} + \dots$$

коэффициенты котораго подобны коэффициентамъ разложенія показательной функціи, можно символически представить въ видѣ:

$$f(x) = e^{ux}. \quad f(x) = e^{ux}$$

Дифференцируя, находимъ:

$$f'(x) = U_1 + \frac{U_2 x}{1} + \frac{U_3 x^2}{1 \cdot 2} + \dots = U e^{ux},$$

$$f^{(p)}(x) = U^p e^{ux}$$

т.-е. операція дифференцированія приложима къ функціи, символически представленной этимъ способомъ.

§ 31. Изслѣдованіе Бернуллиевыхъ функцій при помощи символическаго обозначенія.

Означая для большаго удобства Бернуллиеву функцію $\varphi_n(x)$ при цѣломъ значеніи x чрезъ S_n , такъ что

$$S_n = 1^n + 2^n + \dots + (x-1)^n,$$

легко можно доказать одно тождество символическаго характера, которое приводитъ къ множеству соотношеній между Б. функціями съ различными указателями.

Именно, положимъ, имѣемъ разность отъ нѣкоторой функціи:

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) = \\ = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n x^0.$$

Замѣняя x послѣдовательно чрезъ 1, 2, 3... ($x-1$), находимъ:

$$\begin{aligned} f(2) - f(1) &= a_0 1^n + a_1 1^{n-1} + a_2 1^{n-2} + \dots + a_n 1^0 \\ f(3) - f(2) &= a_0 2^n + a_1 2^{n-1} + a_2 2^{n-2} + \dots + a_n 2^0 \\ &\dots\dots\dots \\ f(x) - f(x-1) &= a_0 (x-1)^n + a_1 (x-1)^{n-1} + \dots + a_n (x-1)^0 \end{aligned}$$

Складывая почленно эти равенства, имѣемъ:

$$f(x) - f(1) = a_0 S_n + a_1 S_{n-1} + a_2 S_{n-2} + \dots + a_n S_0$$

или, примѣняя символическое обозначеніе:

$$\sum_{s=1}^x 1^n + 2^n + \dots + (x-1)^n \quad f(x) - f(1) = \boxed{f(S+1) - f(S)} = \Delta \{f(S)\} \quad \Pi$$

Давая въ этомъ тождествѣ частныя значенія $f(x)$, мы получимъ безчисленное множество соотношеній между функціями S съ различными указателями, изъ которыхъ значенія S могутъ быть постепенно вычислены, подобно тому, какъ числа Бернулли могутъ быть послѣдовательно получены изъ соотношеній Моавра, или какихъ-нибудь другихъ. Такъ, полагая $f(x) = x^n$, имѣемъ:

$$x^n - 1 = \boxed{(S+1)^n - S^n} \quad \text{I}$$

при $f(x) = (x-1)^n$, найдемъ:

$$(x-1)^n = \boxed{S^n - (S-1)^n} \quad (2)$$

Полагая:

$$f(x) = x(x+1)(x+2) \dots (x+n-1)$$

получимъ:

$$\begin{aligned} &= (S+1) \dots (S+n-1)(S+n) - S(S+1) \dots (S+n-1) \\ x(x+1) \dots (x+n-1) - 1.2.3 \dots n &= n \cdot \boxed{S(S+1) \dots (S+n-1)} \quad (3) \end{aligned}$$

Далѣе, употребляя Б. числа какъ съ четными, такъ и съ нечетными указателями, мы можемъ представить Б. функцію S_{n-1} въ видѣ:

$$\begin{aligned} S_{n-1} &= 1^{n-1} + 2^{n-1} + \dots + (x-1)^{n-1} = \\ &= B_0 \frac{x^n}{n} + B_1 x^{n-1} + \frac{(n-1)}{1.2} B_2 x^{n-2} + \dots + B_{n-1} x. \end{aligned}$$

т.-е.

$$2B_1+1=0, B_1=-\frac{1}{2}$$

$$\underline{(B+1)^3-B^3=0}$$

.....

Въ раскрытой формѣ тождество (а) будетъ:

$$nB_{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}B_{n-2}+\dots+nB_1+1=0,$$

что очевидно, представляетъ соотношенія, данныя Моавромъ въ «Miscellanea Analytica». Подобнымъ же образомъ полагая въ (III)

$x=\pm 1, \pm \frac{1}{2}$, будемъ имѣть:

$$\underline{(B+2)^n-(B+1)^n=n}$$

$$\underline{B^n-(B-1)^n=(-1)^{n-1}n}$$

$$(3+2B)^n-(1+2B)^n=2n$$

$$\underline{(2B+1)^n-(2B-1)^n=(-1)^{n-1}.2n}$$

и т. д.

Для полученія еще болѣе сложныхъ зависимостей между числами Я. Бернулли можно воспользоваться символическимъ равенствомъ (I); именно, давъ какое-нибудь частное значеніе для $f(x)$ и получивъ соотвѣтствующую зависимость между функціями S съ разными указателями, замѣнимъ всѣ S ихъ разложеніями въ ряды съ Б. коэффициентами. Тогда каждому частному значенію x будетъ соотвѣтствовать зависимость болѣе или менѣе сложнаго характера между числами Я. Бернулли.

§ 33. Представленіе Бернуллиевыхъ чиселъ въ формѣ детерминантовъ.

Основываясь на какомъ-либо тождествѣ, выражающемъ связь между Б. функціями S съ послѣдовательными указателями, можно различнымъ образомъ представить S_p въ формѣ детерминанта, а потомъ получить и соотвѣтствующее выраженіе для B_p также въ формѣ детерминанта.

Такъ, изъ соотношенія (I) § 31, представляя его въ раскрытой формѣ и замѣняя n послѣдовательно чрезъ $(n-1)$, $(n-2)$, ..., 2 , 1 имѣемъ:

$$x^n - 1 = (n)_1 S_{n-1} + (n)_2 S_{n-2} + (n)_3 S_{n-3} + \dots + n S_1 + S_0$$

$$x^{n-1} - 1 = (n-1)_1 S_{n-2} + (n-1)_2 S_{n-3} + \dots + (n-1) S_1 + S_0$$

$$x^2 - 1 = 2 S_1 + S_0$$

$$x - 1 = S_0$$

Опредѣляя отсюда S_{n-1} , имѣемъ:

$$S_{n-1} = \frac{1}{1 \cdot 2 \dots n} \begin{vmatrix} x^n & (n)_1 & (n)_2 & \dots & n & 1 \\ x^{n-1} & (n-1)_1 & (n-1)_2 & \dots & (n-1) & 1 \\ x^{n-2} & 0 & (n-2)_1 & \dots & (n-2) & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^2 & 0 & \dots & \dots & 2 & 1 \\ x & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Сравнивая коэффициенты при x въ 1-й степени здѣсь и въ соотношеніи (II) § 31, получимъ:

$$B_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \begin{vmatrix} (n)_2 & (n)_3 & \dots & n & 1 \\ (n-1)_1 & (n-1)_2 & \dots & (n-2) & 1 \\ 0 & (n-2)_1 & \dots & (n-2) & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

см. стр. 46

Такъ, при $n=5$, получимъ:

$$B_4 = \frac{1}{5!} \begin{vmatrix} 10 & 10 & 5 & 1 \\ 4 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{4}{5!} = -\frac{1}{30}.$$

$$B_{2n} = (-1)^{2n} (2n)! \begin{vmatrix} \frac{1}{1!} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{2!} \\ \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{3!} \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{4!} \end{vmatrix}$$

Подобнымъ же образомъ, при помощи другихъ соотношеній, получающихся изъ (I), можно, очевидно, получить и иные выраженія Б. чиселъ въ формѣ детерминантовъ.

§ 34. Общее символическое тождество для вывода зависимостей между числами Я. Бернулли.

Изъ соотношенія (II) можно получить тождество общаго характера, пригодное для разнообразнѣйшихъ выводовъ относительно Б. чиселъ.

Именно, положимъ имѣемъ какую-либо цѣлую функцію

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a_m x^0.$$

Замѣнимъ въ тождествѣ (II) и послѣдовательно чрезъ $m, (m-1), \dots, 3, 2, 1$; полученные равенства умножимъ на a_0, a_1, \dots, a_{m-1} и сложимъ ихъ почленно; найдемъ:

$$f(x+B+1) - f(x+B) = f'(x)$$

или полагая $\Delta x = 1$,

$$\Delta f(x+B) = \frac{df(x)}{dx} \quad (IV)$$

Давая здѣсь $f(x)$ любое частное значеніе, получимъ сколько угодно равенствъ, содержащихъ x и Б. числа. Сравнивая въ нихъ коэффициенты при равныхъ степеняхъ x , а также давая частныя значенія для x , будемъ находить всевозможныхъ видовъ зависимости между числами Бернулли.

Разсмотримъ нѣкоторые примѣры.

Полагая, что $f(x)$ есть факторіальная функція вида:

$$f(x) = x(x+1)(x+2) \dots (x+n-1)$$

имѣемъ:

$$\Delta f(x) = n(x+1)(x+2) \dots (x+n-1)$$

слѣдовательно:

$$\Delta f(x+B) = n(x+B+1)(x+B+2) \dots (x+B+n-1) = f'(x) \quad (a)$$

При $x=0$ это даетъ соотношеніе:

$$(B+1)(B+2) \dots (B+n-1) = \frac{1 \cdot 2 \dots (n-1)}{n}.$$

Если же обѣ части равенства (а) раздѣлить на $f(x)$, найдемъ:

$$\frac{n(x+B+1)\dots(x+B+n-1)}{x(x+1)\dots(x+n-1)} = \frac{f'(x)}{f(x)} =$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \dots + \frac{1}{x+n-1}$$

откуда, въ предположеніи, что $x=1$, получимъ соотношеніе:

$$(B+2)(B+3)\dots(B+n) = 1.2\dots(n-1) \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right).$$

Если положимъ въ тождествѣ (IV)

$$f(x) = (x-1)^p x^q$$

причемъ $p > q$, то при $x=1$, найдемъ:

$$B^p(B+1)^q - B^q(B-1)^p = 0.$$

$$\left(\frac{B+1}{B}\right)^n = 1 \quad (\text{ср. 105})$$

$$\left(\frac{B+1}{B}\right)^q = \left(\frac{B-1}{B}\right)^p = /$$

Раскрывая это равенство, мы получимъ, очевидно, соотношеніе, въ которое входятъ не всѣ B . числа отъ B_0 до B_{p+q} , но лишь тѣ изъ нихъ, которыя заключаются между B_{p+q} и B_q . Полученное равенство является, слѣдовательно, обобщеніемъ формулы Штерна, которыми мы занимались во II-й главѣ (§ 12).

§ 35. Распространеніе основного тождества на случай функций со многими переменными.

Тождество (IV) легко можетъ быть распространено на функции со многими переменными и въ этомъ случаѣ даетъ возможность получать соотношенія, въ которыя входятъ произведенія B . чиселъ по два, по 3 и т. д. Дѣйствительно, мы имѣли:

$$\Delta f(x+B) = \frac{df(x)}{dx} \quad (IV)$$

если возьмемъ функцію съ 2 переменными $f(x, y)$ то это-же тождество принимаетъ видъ:

$$\Delta_x f(x+B, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$$

если же теперь примѣнимъ ту же формулу къ функціи $\Delta_x f(x+B, y)$ какъ къ функціи y , то найдемъ:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \Delta^2_{x, y} f(x+B, y+B')$$

гдѣ B . числа, соотвѣтствующія R и B' могутъ быть взаимно комбинированы уже только какъ дѣйствительныя, а не какъ символическія количества, т.-е. когда сдѣлано уже символическое разложение, относящееся къ $x+B$ и $y+B'$ и показатели степеней у B и B' замѣнены индексами. При частныхъ значеніяхъ x и y эта формула приводитъ, слѣдовательно, къ равенствамъ, въ которыя входятъ квадраты B . чиселъ и произведенія ихъ попарно. Точно также найдемъ для функций съ 3 переменными:

$$\Delta^3_{x, y, z} f(x+B, y+B', z+B'') = \frac{\partial^3 f(x, y, z)}{\partial x \partial y \partial z}$$

— тождество, приводящее къ соотношеніямъ 3-го порядка между числами Я. Бернулли. Аналогичнымъ образомъ основное тождество можетъ быть распространено и на случай функций съ любымъ числомъ переменныхъ.

§ 36. Обобщеніе основного тождества и слѣдствія.

Основное символическое тождество (IV) въ цѣляхъ еще болѣе общности можетъ быть преобразовано введеніемъ въ него еще некотораго новаго произвольнаго количества θ и представлено въ видѣ:

$$\underline{f[x+(B+1)\theta] - f(x+B\theta)} = \theta \frac{df(x)}{dx}$$

Дѣйствительно, исходя изъ тождества:

$$(B+1)^n - B^n = 0 \quad \left(\frac{B+1}{B}\right)^n = 1$$

имѣемъ:

при $n = 2, 3, 4, \dots, n, \dots$
$$\underline{(B+1)^n \theta^n - B^n \theta^n = 0}$$

а это приводитъ къ равенству:

при $n = 2, 3, 4, \dots, n, \dots$
$$\underline{[x+(B+1)\theta]^n - (x+B\theta)^n} = 0 \cdot nx^{n-1} = \theta \frac{d}{dx} x^n \quad (a)$$

въ чемъ убѣждаемся непосредственно, дѣлая разложеніе лѣвой части по биному Ньютона.

Пусть теперь имѣемъ функцию:

Получивъ ур-ніе Y , можно его логарифмировать
 возводить въ него, какъ въ степень, брать отъ него
 Тригонометр. функціи и т. п., сокращая одн
 части на функціи — 111 — отъ B и m , а
 эти части въ дифференцировании не могутъ превратиться

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a_m x^0,$$

тогда, замѣняя въ (а) n последовательно чрезъ $m, m-1, \dots, 2, 1$
 и умножая получающіяся равенства на a_0, a_1, \dots, a_{m-1} , получимъ
 по сложеніи ихъ:

$$f[x+(B+1)\theta] - f(x+B\theta) = \theta f'(x). \quad (V)$$

Въ этой формѣ символическое тождество, какъ увидимъ, весьма
 пригодно для полученія разложеній различныхъ функцій въ ряды
 съ B . коэффиціентами.

Такъ, полагая $f(x) = e^x$, находимъ:

$$\frac{e^{x+(B+1)\theta}}{e^{x+B\theta}} - e^{x+B\theta} = \theta e^x$$

или, при $x=0$,

$$\frac{e^{(B+1)\theta}}{e^{B\theta}} - e^{B\theta} = \theta; \quad \frac{e^{B\theta}}{e^{\theta}-1} = \frac{\theta}{e^{\theta}-1},$$

т. е.

$$\frac{\theta}{e^{\theta}-1} = 1 + B_1 \theta + B_2 \frac{\theta^2}{1.2} + \dots$$

(6)
 Нельзя написать
 $B\theta = \frac{\theta}{e^{\theta}-1}$
 и наоборот!

—разложение, которымъ мы такъ часто пользовались. Въ полу-
 ченной символической формѣ оно, при дальнѣйшихъ частныхъ
 предположеніяхъ, ведетъ къ новымъ заключеніямъ относительно
 чиселъ Я. Бернулли. Напр., представляя его въ видѣ:

$$\frac{e^{B\theta}}{e^{\theta}-1} = \frac{l(e^{\theta})}{e^{\theta}-1}$$

и, полагая затѣмъ:

$$e^{\theta} = x+1,$$

найдемъ:

$$(x+1)^B = \frac{1}{x} l(x+1) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \dots$$

Дѣлая разложение въ лѣвой части и сравнивая коэффиціенты
 при x^n , найдемъ соотношеніе:

$$\frac{B(B-1)\dots(B-n+1)}{1.2\dots n} = \frac{(-1)^n}{n+1} = \frac{(-1)^n (B+1)(B+2)\dots(B+n)}{1.2\dots n}$$

$$\frac{d^n}{dx^n} (x+B+1)^k = \frac{d^n}{dx^n} (x+B\theta)^k = \theta^n \frac{d^n}{dx^n} (x)^k = \frac{\theta^n k!}{x^{k-n}}$$

$$\frac{d^n}{dx^n} (x+B+1)^k = \frac{\theta^n k!}{x^{k-n}}; \quad \text{при } x=m\theta \quad \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{m+1+B}{m+B} \right)^k = \frac{\theta^n k!}{m^n} = \frac{k!}{m^n}$$

здесь
 слѣд- $(B+m+1)^k = \frac{k!}{m^n}$

и вообще:

$$\begin{aligned} & f\{x+(mB+1)\theta\} + f\{x+(mB+2)\theta\} + \dots \\ & + f\{x+(mB+m)\theta\} = mf\{x+m(B+1)\theta\} \end{aligned} \quad (\text{VII})$$

что можно доказать тѣмъ же приемомъ, который мы употребляли при выводѣ равенства (V).

§ 37. Разложеніе въ ряды нѣкоторыхъ тригонометрическихъ функций и слѣдствія.

Положимъ въ ф. (V) $f(x) = \sin x$ и затѣмъ $x=0$, найдемъ:

$$\sin(B+1)\theta - \sin B\theta = 0 \quad (a)$$

точно также, дѣлая $f(x) = \cos x$ и $x=0$, имѣемъ:

$$\cos(B+1)\theta - \cos B\theta = 0 \quad (b)$$

Возвышая (a) и (b) въ квадратъ и складывая, находимъ:

$$\sin B\theta = -\frac{\theta}{2}$$

и такъ какъ равенство (b) даетъ:

$$\cos B\theta \cdot \cos \theta - \sin B\theta \cdot \sin \theta - \cos B\theta = 0$$

или

$$\cos B\theta (\cos \theta - 1) = -\frac{\theta}{2} \sin \theta$$

то

$$\cos B\theta = \frac{\theta}{2} \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}$$

или

$$\cos B\theta = \frac{\theta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}$$

Освобождая это равенство отъ символической формы, имѣемъ:

$$\frac{\theta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = 1 - B, \frac{\theta^2}{1.2} + B, \frac{\theta^4}{1.2.3.4} - \dots$$

—разложеніе, которымъ мы пользовались уже ранѣе.

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \Delta_{x, y}^2 f(x+B, y+B')$$

гдѣ B , числа, соотвѣтствующія R и B' могутъ быть взаимно комбинировемы уже только какъ дѣйствительныя, а не какъ символическія количества, т.-е. когда сдѣлано уже символическое разложение, относящееся къ $x+B$ и $y+B'$ и показатели степеней у B и B' замѣнены индексами. При частныхъ значеніяхъ x и y эта формула приводитъ, слѣдовательно, къ равенствамъ, въ которыя входятъ квадраты B . чиселъ и произведенія ихъ попарно. Точно также найдемъ для функціи съ 3 переменными:

$$\Delta_{x, y, z}^3 f(x+B, y+B', z+B'') = \frac{\partial^3 f(x, y, z)}{\partial x \partial y \partial z}$$

— тождество, приводящее къ соотношеніямъ 3-го порядка между числами Я. Бернулли. Аналогичнымъ образомъ основное тождество можетъ быть распространено и на случай функціи съ любымъ числомъ переменныхъ.

§ 36. Обобщеніе основного тождества и слѣдствія.

Основное символическое тождество (IV) въ цѣляхъ еще большей общности можетъ быть преобразовано введеніемъ въ него еще дѣйствительнаго новаго произвольнаго количества θ и представлено въ видѣ:

$$f[x+(B+1)\theta] - f(x+B\theta) = \theta \frac{df(x)}{dx}$$

Дѣйствительно, исходя изъ тождества:

$$(B+1)^n - B^n = 0 \quad \left(\frac{B+1}{B}\right)^n = 1$$

имѣемъ:

$$\text{при } n = 2, 3, 4, \dots, n, \dots \quad (B+1)^n \theta^n - B^n \theta^n = 0$$

а это приводитъ къ равенству:

$$[x+(B+1)\theta]^n - (x+B\theta)^n = \theta \cdot nx^{n-1} = \theta \frac{d}{dx} x^n \quad (a)$$

въ чемъ убѣждаемся непосредственно, дѣлая разложеніе лѣвой части по биному Ньютона.

Пусть теперь имѣемъ функцію:

Получивъ уравнiе Y , найдемъ его логарифмируя
возводимъ въ него, какъ въ степеняхъ, браяъ ab и
Тригонометр. функции и т. п., сокращаяъ аб-
сциссу на функции — 111 — см. в. 13 и т. п., с
этимъ же въ сферическомъ и въ гиперболическомъ
 $f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a_m x^0,$

тогда, замѣняя въ (а) n последовательно чрезъ $m, m-1, \dots, 2, 1$ и умножая получающіяся равенства на a_0, a_1, \dots, a_{m-1} , получимъ по сложеніи ихъ:

$$f[x+(B+1)\theta]-f(x+B\theta)=\theta f''(x). \quad (V)$$

Въ этой формѣ символическое тождество, какъ увидимъ, весьма пригодно для полученія разложеній различныхъ функций въ ряды съ B . коэффициентами.

Такъ, полагая $f(x)=e^x$, находимъ:

$$e^{x+(B+1)\theta} - e^{x+B\theta} = \theta e^x$$

или, при $x=0$,

$$e^{(B+1)\theta} - e^{B\theta} = \theta; \quad e^{B\theta} = \frac{\theta}{e^{\theta}-1},$$

T. e.

$$e^{\frac{\theta}{-1}} = 1 + B_1 \theta + B_2 \frac{\theta^2}{1.2} + \dots$$

→ (b)

He. 1639 kan

$B\theta = \frac{g}{g} \frac{(b)}{e}$

и каодо

—разложене, которымъ мы такъ часто пользовались. Въ полученной символической формѣ оно, при дальнѣйшихъ частныхъ предположеніяхъ, ведетъ къ новымъ заключеніямъ относительно чиселъ Я. Бернулли. Напр., представляя его въ видѣ:

$$e^{B\theta} = \frac{l(e^\theta)}{e^\theta - 1}$$

и, полагая затѣмъ:

$$e^{\theta} = x + 1.$$

найдемъ:

$$(x+1)^B = \frac{1}{x} l(x+1) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \dots$$

Дѣлая разложение въ лѣвой части и сравнивая коэффициенты при x^n , найдемъ соотношеніе:

$$\frac{B(B-1)\dots(B-n+1)}{1.2\dots n} = \frac{(-1)^n}{n+1} = (-1)^n \frac{1}{(B+1)(B+2)\dots(B+n+1)}$$

Замѣняя въ (b) θ чрезъ $-\theta$, получимъ:

$$\frac{e^{-B\theta}}{e^{-\theta}-1} = -\frac{\theta}{e^{-\theta}-1} = \frac{\theta e^{\theta}}{e^{\theta}-1} \quad (c)$$

Эту формулу можно различно комбинировать съ начальной; такъ умножая почленно (b) на $e^{n\theta}$, а (c) на $e^{-n\theta}$, имѣемъ:

$$\frac{e^{(B+n)\theta}}{e^{\theta}-1} = \frac{\theta e^{n\theta}}{e^{\theta}-1}, \quad e^{n\theta} \cdot e^{B\theta}$$

$$\frac{e^{-(B+n)\theta}}{e^{-\theta}-1} = \theta \frac{e^{(1-n)\theta}}{e^{\theta}-1}$$

откуда при $n = \frac{1}{2}$, имѣемъ:

$$\frac{e^{(B+\frac{1}{2})\theta}}{e^{\theta}-1} = -\frac{e^{-(B+\frac{1}{2})\theta}}{e^{\theta}-1}$$

что приводитъ къ соотношенію:

$$\left(B + \frac{1}{2}\right)^{2m+1} = 0.$$

То-же равенство (b) даетъ тождество:

$$\frac{e^{(mB+1)\theta}}{e^{\theta}-1} + \frac{e^{(mB+2)\theta}}{e^{\theta}-1} + \dots + \frac{e^{(mB+m)\theta}}{e^{\theta}-1} =$$

$$= \frac{m\theta}{e^{\theta}-1} (e^{\theta} + e^{2\theta} + \dots + e^{m\theta}) =$$

$$= \frac{e^{\theta} \cdot m\theta}{e^{\theta}-1} = m e^{(B+1)\theta} \quad (d)$$

Сравнивая коэффициенты при θ^p въ обѣихъ частяхъ (d), находимъ слѣдующую замѣчательную зависимость:

$$(mB+1)^p + (mB+2)^p + \dots + (mB+m)^p = m(B+1)^p. \quad (VI)$$

Откуда находимъ:

$$[x + (mB+1)\theta]^p + [x + (mB+2)\theta]^p + \dots$$

$$\dots + [x + (mB+m)\theta]^p = m[x + m(B+1)\theta]^p$$

$$\frac{1 + 2^{k-1} + \dots + (m-1)^{k-1}}{m^k} = \frac{m^{k-1}}{e^{\theta}-1}$$

$$\frac{1 + 2^{k-1} + \dots + (m-1)^{k-1}}{m^k} = \frac{1}{m} \frac{1}{e^{\theta}-1} = k \cdot \text{пред. lim} = \frac{1}{k} \cdot \text{пред. lim}$$

и вообще:

$$\begin{aligned} & f\{x+(mB+1)\theta\} + f\{x+(mB+2)\theta\} + \dots \\ & + f\{x+(mB+m)\theta\} = mf\{x+m(B+1)\theta\} \end{aligned} \quad (\text{VII})$$

что можно доказать тѣмъ же приѣмомъ, который мы употребляли при выводѣ равенства (V).

§ 37. Разложеніе въ ряды нѣкоторыхъ тригонометрическихъ функций и слѣдствія.

Положимъ въ ф. (V) $f(x) = \sin x$ и затѣмъ $x=0$, найдемъ:

$$\sin(B+1)\theta - \sin B\theta = \theta \quad (a)$$

точно также, для $f(x) = \cos x$ и $x=0$, имѣемъ:

$$\cos(B+1)\theta - \cos B\theta = 0 \quad (b)$$

Возвышая (a) и (b) въ квадратъ и складывая, находимъ:

$$\sin B\theta = -\frac{\theta}{2}$$

и такъ какъ равенство (b) даетъ:

$$\cos B\theta \cdot \cos \theta - \sin B\theta \cdot \sin \theta - \cos B\theta = 0$$

или

$$\cos B\theta (\cos \theta - 1) = -\frac{\theta}{2} \sin \theta$$

то

$$\cos B\theta = \frac{\theta}{2} \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}$$

или

$$\cos B\theta = \frac{\theta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}$$

Освобождая это равенство отъ символической формы, имѣемъ:

$$\frac{\theta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = 1 - B_2 \frac{\theta^2}{1 \cdot 2} + B_4 \frac{\theta^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots$$

—разложеніе, которымъ мы пользовались уже ранѣе.

Изъ формулы (а) имѣемъ еще:

$$2\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{(2B+1)\theta}{2} = \theta,$$

откуда, замѣняя θ чрезъ 2θ , найдемъ:

$$\cos(2B+1)\theta = \frac{\theta}{\sin \theta}$$

Полученными выраженіями для $\sin B\theta$, $\cos B\theta$, $\cos(2B+1)\theta$ можно пользоваться для разложенія въ ряды различныхъ тригонометрическихъ величинъ, напр.

$$\cos[(n+1)+2B]\theta = \cos(n+1)\theta \cdot \cos 2B\theta - \sin(n+1)\theta \cdot \sin 2B\theta$$

Замѣняя $\cos 2B\theta$ и $\sin 2B\theta$ ихъ значеніями, найдемъ:

$$\begin{aligned} \cos[(n+1)+2B]\theta &= \cos(n+1)\theta \cdot \theta \operatorname{ctg} \theta + \sin(n+1)\theta \cdot \theta = \\ &= \theta (\cos n\theta \cdot \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} + \cos n\theta \cdot \sin \theta) = \theta \cdot \frac{\cos(n\theta)}{\sin \theta} \end{aligned}$$

т. е. мы получили разложение:

$$\begin{aligned} \frac{\theta \cos(n\theta)}{\sin \theta} &= \cos[(n+1)+2B]\theta = 1 - \left\{ (n+1) + 2B \right\}^2 \frac{\theta^2}{1.2} + \\ &+ \left\{ (n+1) + 2B \right\}^4 \frac{\theta^4}{1.2.3.4} - \dots \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\theta \cos(n\theta)}{\sin \theta} &= 1 - \left\{ (n+1)^2 + 4B_1 + 4B_2 \right\} \frac{\theta^2}{1.2} + \\ &+ \left\{ (n+1)^4 + 8(n+1)^2 B_1 + 24(n+1)^2 B_2 + 16B_4 \right\} \frac{\theta^4}{1.2.3.4} - \dots \end{aligned}$$

Точно также имѣемъ:

$$\begin{aligned} \sin \{ (n+1) + 2B \} \theta &= \sin(n+1)\theta \cdot \cos 2B\theta + \cos(n+1)\theta \cdot \sin 2B\theta = \\ &= \sin(n+1)\theta \cdot \theta \operatorname{ctg} \theta - \cos(n+1)\theta \cdot \theta = \\ &= \frac{\theta \cdot \sin(n\theta)}{\sin \theta} \end{aligned}$$

слѣдовательно:

$$\frac{\theta \cdot \sin(n\theta)}{\sin\theta} = \sin[(n+1)+2B]\theta = [(n+1)+2B_1]\theta - \\ - [(n+1)^2 + 6(n+1)^2 B_1 + 12(n+1)B_1] \frac{\theta^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

Измѣняя въ этихъ формулахъ θ на $m\theta$, а n въ $\frac{1}{m}$, получили бы еще разложенія функций

$$\frac{m\theta \cdot \cos\theta}{\sin(m\theta)}, \quad \frac{m\theta \cdot \sin\theta}{\sin(m\theta)}$$

въ видѣ рядовъ съ Бернуллиевыми коэффициентами. Давая величинамъ, входящимъ во всѣ разложенія подобнаго рода, частныя значенія, всячески комбинируя получаемыя формулы между собой и пр., мы можемъ все болѣе и болѣе уяснять себѣ свойства Б. чисель.

Рассмотримъ одинъ примѣръ.

Положимъ въ ф. (VII): $f(x) = \cos x$, $m=2$, и $x=0$. Тогда имѣемъ:

$$\cos(2B+1)\theta + \cos(2B+2)\theta = 2\cos(B+1)\theta = 2\cos B\theta.$$

Отсюда

$$\cos\left(2B + \frac{3}{2}\right)\theta \cdot \cos \frac{\theta}{2} = \cos B\theta = \frac{\theta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}$$

слѣдовательно

$$\cos(4B+3)\theta = \frac{\theta}{\sin\theta} = \cos(2B+1)\theta$$

сравнивая коэффициенты при θ^{2n} , имѣемъ:

$$(4B+3)^{2n} = (2B+1)^{2n} \quad (c)$$

Съ другой стороны, по ф. (VI) имѣемъ соотношеніе:

$$(4B+1)^{2n} + (4B+2)^{2n} + (4B+3)^{2n} + (4B+4)^{2n} = 4(B+1)^{2n}$$

Замѣняя здѣсь въ силу (c) $(4B+3)^{2n}$ чрезъ $(2B+1)^{2n}$ и дѣлая упрощенія, имѣемъ:

$$(4B+1)^{2n} + (2^{2n}+1)[(2B+1)^{2n} + (2B+2)^{2n}] = \\ = 4(B+1)^{2n} + (2B+2)^{2n}$$

или, опять по ф. (VI):

$$(4B+1)^{2^n} + (2^{2^n} + 1)2(B+1)^{2^n} = (4+2^{2^n})(B+1)^{2^n}$$

откуда

$$(4B+1)^{2^n} = (2-2^{2^n})(B+1)^{2^n} = (2-2^{2^n})B_{2^n}.$$

Но и

$$(2B+1)^{2^n} = (2-2^{2^n})(B+1)^{2^n}$$

какъ это слѣдуетъ изъ тождества:

$$(2B+1)^{2^n} + (2B+2)^{2^n} = 2(B+1)^{2^n}$$

и потому заключаемъ, что 3 функции Б. чиселъ:

$$(2B+1)^{2^n}, (4B+1)^{2^n}, (4B+3)^{2^n}$$

равны между собою; именно, каждая изъ нихъ равна $(2-2^{2^n})B_{2^n}$.
Т. е. иначе

$$\begin{aligned} & 1 + (2n)_1 2B_1 + (2n)_2 2^2 B_2 + (2n)_3 2^3 B_3 + \dots \\ & = 1 + (2n)_1 4B_1 + (2n)_2 4^2 B_2 + (2n)_3 4^3 B_3 + \dots \\ & = 3^{2^n} \left[1 + (2n)_1 \frac{4}{3} B_1 + (2n)_2 \left(\frac{4}{3} \right)^2 B_2 + \dots \right] = \\ & = (2-2^{2^n})B_{2^n}. \end{aligned}$$

Г Л А В А VI.

Приложение къ изслѣдованію чиселъ Я. Бернулли методомъ теоріи чиселъ.

Непосредственное примѣненіе началъ теоріи чиселъ къ изученію чиселъ Я. Бернулли привело къ раскрытію наиболѣе существенныхъ и замѣчательныхъ ихъ свойствъ, и потому такой способъ изслѣдованія Б. чиселъ въ послѣднее время является господствующимъ. Въ настоящей главѣ мы и изложимъ всѣ главнѣйшіе результаты, достигнутые этимъ путемъ.

§ 38. Теорема Штаудта.

Однимъ изъ первыхъ и вмѣстѣ важнѣйшихъ предложеній, доказанныхъ при помощи теоріи чиселъ, является теорема, откры-

тая Штаудтомъ, которая точно опредѣляетъ числовой составъ Б. числа B_{2n} . Именно, по этой теоремѣ B_{2n} представляетъ разность:

$$B_{2n} = A_{2n} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \dots + \frac{1}{\lambda} \right)$$

гдѣ уменьшаемое A_{2n} — нѣкоторое цѣлое число, положительное или отрицательное, а вычитаемое представляетъ сумму дробей; изъ которыхъ каждая имѣетъ числителемъ 1, а знаменателемъ простое число, которое на 1 превышаетъ одного изъ дѣлителей числа $2n$. Эта теорема была изложена Штаудтомъ въ первый разъ въ XXI т. журнала Крелля; доказательство ея было имъ основано на 9 леммахъ, раскрывающихъ нѣкоторыя числовыя свойства Б. функции $S_{2n}(x)$. Нѣсколько позже Штаудтъ предложилъ новое, болѣе краткое и строгое доказательство своей теоремы, и развилъ нѣкоторыя ея слѣдствія въ двухъ небольшихъ сочиненіяхъ: «De numeris Bernullianis. Commentatio I» и «Commentatio II» (Erlangen, 1845).

Мы изложимъ здѣсь именно это послѣднее доказательство. Оно основано на представленіи Б. числа въ видѣ:

$$B_{2n} = \left\{ -\frac{\Delta^0 0^{2n}}{2} + \frac{\Delta^1 0^{2n}}{3} - \dots - \frac{\Delta^{2n-1} 0^{2n}}{2n} + \frac{\Delta^{2n} 0^{2n}}{2n+1} \right\} \quad (I)$$

которое мы нѣсколькими способами получили въ IV-й главѣ. По этой формулѣ B_{2n} представляется въ видѣ суммы выраженій вида $\frac{\Delta^{p-1} 0^{2n}}{p}$, но легко можно убѣдиться, что $\Delta^{p-1} 0^{2n}$ представляетъ собой цѣлое число, среди множителей котораго находятся всѣ числа отъ 1 до $(p-1)$ включительно. Въ самомъ дѣлѣ, при выводѣ формулы Каталана (§ 29), мы видѣли, что x^p можетъ быть представлено въ видѣ:

$$x^p = x^{(1)} + M_p^{(1)} x^{(2)} + M_p^{(2)} x^{(3)} + \dots + M_p^{(p-1)} x^{(p)}$$

гдѣ $M_p^{(k)}$ — цѣлыя числа, связанныя между собой нѣкоторымъ соотношеніемъ (§ 29, I'). Съ другой стороны, разлагая x^p обыкновеннымъ порядкомъ по факторіальнымъ функциямъ, имѣемъ:

$$x^p = \Delta 0^p \cdot x^{(1)} + \frac{\Delta^2 0^p}{1.2} x^{(2)} + \frac{\Delta^3 0^p}{1.2.3} x^{(3)} + \dots + \frac{\Delta^p 0^p}{1.2 \dots p} x^{(p)}$$

Сравнивая оба выражения для x^p , находимъ:

$$\Delta 0^p = 1 \cdot M_p^{(1)}, \Delta^2 0^p = 1.2 M_p^{(2)} \dots$$

$$\Delta^p 0^p = 1.2 \dots p M_p^{(p-1)}$$

Поэтому

$$\Delta^{p-1} 0^{2n} = 1.2 \dots (p-1) M_{2n}^{(p-1)}$$

т. е. $\Delta^{p-1} 0^{2n}$ дѣйствительно представляетъ нѣкоторое цѣлое число, дѣлящееся на $1.2 \dots (p-1)$.

Разсматривая поэтому $\frac{\Delta^{p-1} 0^{2n}}{p}$, видимъ, что въ томъ случаѣ, когда p есть число составное, количество это непременно должно быть числомъ цѣлымъ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть $p = a \cdot b$, гдѣ $a > b > 1$, тогда оба числа a и b , будучи менѣе числа p , встрѣтятся въ рядѣ множителей $1.2 \dots (p-1)$, которые входятъ въ числитель разсматриваемаго выраженія и потому $\Delta^{p-1} 0^{2n}$ раздѣлится въ этомъ случаѣ на p . Также и въ случаѣ, когда p представляетъ квадратъ: $p = a^2$, имѣемъ; $a^2 > 2a$ (кромѣ $a^2 = 4$); числа a и $2a$ встрѣтятся въ рядѣ $1.2 \dots (p-1)$ и потому $\frac{\Delta^{p-1} 0^{2n}}{p}$ — цѣлому числу. Наконецъ, когда $p = 4$, разсматриваемое выраженіе есть $\frac{\Delta^3 0^{2n}}{4}$, но

$$\frac{\Delta^3 0^{2n}}{4} = 3^{2n} - 3 \cdot 2^{2n} + 3 = 3[(3^{2n-1} + 1) - 2^{2n}].$$

и такъ какъ

$$\begin{aligned} 3^{2n-1} + 1 &= (4-1)^{2n-1} + 1 = \\ &= \left\{ 4^{2n-1} - (2n-1)4^{2n-2} + \dots + (2n-1)4 - 1 \right\} + 1 \end{aligned}$$

т. е. дѣлится на 4, то $\frac{\Delta^3 0^{2n}}{4}$ есть число цѣлое. Итакъ, при p составномъ, $\frac{\Delta^{p-1} 0^{2n}}{p}$ всегда будетъ числомъ цѣлымъ.

Когда же p есть простое число, большее 2, то пусть r есть наименьшій положительный вычет числа $2n$ по модулю $(p-1)$. Тогда, принявъ формулу Фермата къ выраженію:

$$\Delta^{p-1}0^{2n} = (p-1)^{2n} - \frac{(p-1)}{1} (p-2)^{2n} + \frac{(p-1)(p-2)}{1.2} (p-3)^{2n} - \dots$$

получимъ:

$$\begin{aligned} \Delta^{p-1}0^{2n} &\equiv (p-1)^r - \frac{(p-1)}{1} (p-2)^r + \\ &+ \frac{(p-1)(p-2)}{1.2} (p-3)^r - \dots \pmod{p} \end{aligned}$$

Поэтому всякій разъ, когда $r > 0$, т. е. $2n$ не дѣлится на $(p-1)$, имѣемъ сравненіе:

$$\Delta^{p-1}0^{2n} \equiv \Delta^{p-1}0^r \pmod{p}$$

и такъ какъ $r < (p-1)$, то $\Delta^{p-1}0^r = 0$ и потому $\frac{\Delta^{p-1}0^{2n}}{p}$ п въ этомъ случаѣ есть число дѣльное. Если же $r = 0$, т. е. $2n$ дѣлится на $(p-1)$, имѣемъ:

$$\Delta^{p-1}0^{2n} \equiv (1-1)^{p-1} - 1 \equiv -1 \pmod{p}$$

слѣдовательно, $\frac{\Delta^{p-1}0^{2n}}{p} + \frac{1}{p} =$ дѣлому, т. е. въ этомъ случаѣ $\frac{\Delta^{p-1}0^{2n}}{p}$

представляетъ разность нѣкотораго дѣлаго числа п дроби $\frac{1}{p}$.

Наконецъ, членъ $-\frac{\Delta 0^{2n}}{2} = -\frac{1}{2}$.

Итакъ, въ общемъ выраженіи (I) Б. числа B_n будутъ дѣльными числами всѣ тѣ члены, у которыхъ знаменатель число составное или же такое простое, которое по отнятіи отъ него 1, не является дѣлителемъ $2n$. Всѣ же прочіе члены разбиваются на разность дѣлаго числа и дроби, у которой числитель есть 1, а знаменатель простое число, превосходящее на 1 одного изъ дѣлителей числа $2n$. Соединяя всѣ дѣлыя числа вмѣстѣ, имѣемъ:

$$B_n = A_n - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \dots + \frac{1}{\lambda} \right)$$

гдѣ A_n —цѣлое число; $2, 3, \alpha, \beta, \dots, \lambda$ —такія простые числа, которыя, по, отнятіи единицы, дѣлятъ число $2n$.

Такимъ образомъ, теорема Штаудта доказана.

Такъ напр., дѣлителями 2 будутъ 1, 2; увеличивая ихъ на 1, имѣемъ 2, 3—простыя числа. Поэтому:

$$B_2 = A_2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right)$$

И дѣйствительно:

$$B_2 = \frac{1}{6} = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right).$$

Точно также, дѣлители числа 24 суть: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Увеличивая ихъ на 1, имѣемъ: 2, 3, 4, 5, 7, 9, 13, 25; простыя изъ нихъ только 2, 3, 5, 7, 13 и потому;

$$B_{24} = A_{24} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{13} \right)$$

и дѣйствительно

$$B_{24} = -\frac{236364091}{2730} = -86579 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{13} \right).$$

Изъ теоремы слѣдуетъ непосредственно, что знаменатель каждаго B . числа долженъ дѣлиться на 6. Легко видѣть, у какихъ чиселъ Я. Бернулли знаменателемъ будетъ число 6: это—тѣ числа, для которыхъ n —число простое, а $(2n+1)$ —составное. Въ самомъ дѣлѣ, дѣлителями $2n$ въ этомъ случаѣ будутъ: 1, 2, n , $2n$; увеличивая ихъ на 1, имѣемъ: 2, 3, $n+1$, $2n+1$; здѣсь простые числа только 2 и 3, и потому:

$$B_{2n} = A_{2n} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right).$$

Таковы B . числа $B_{14}, B_{26}, B_{34}, B_{38}, \dots$ и пр.

§ 39. Формула Эрмита.

Теорема Штаудта, точно опредѣляя дробную часть B . числа B_{2n} , не даетъ, однако, возможности непосредственно получать входящее въ его составъ цѣлое число A_{2n} . Для этой послѣдней цѣли, какъ показалъ Эрмитъ, можно воспользоваться соотношеніями, которыми удовлетворяютъ B . числа.

Такъ, мы имѣемъ символическое соотношеніе:

$$(B+1)^{2n+1} - B^{2n+1} = 0$$

или въ раскрытой формѣ:

$$1 + (2n+1)_1 B_1 + (2n+1)_2 B_2 + \dots + (2n+1)_{2n} B_{2n} = 0$$

замѣняя здѣсь B_i чрезъ $-\frac{1}{2}$, а прочія B . числа—ихъ выраженіями по теоремѣ Штаудта, найдемъ:

$$\begin{aligned} & (2n+1)_1 \left(A_1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + (2n+1)_2 \left(A_2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots \\ & + (2n+1)_{2n} \left(A_{2n} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \dots - \frac{1}{2n+1} \right) - n + \frac{1}{2} = 0 \end{aligned} \quad (I)$$

Отбирая здѣсь члены, имѣющіе множителемъ $\frac{1}{2}$, имѣемъ:

$$-\frac{1}{2} \left\{ (2n+1)_2 + (2n+1)_4 + \dots + (2n+1)_{2n} - 1 \right\}$$

но

$$\begin{aligned} & (2n+1)_2 + (2n+3)_4 + \dots + (2n+1)_{2n} = \\ & = \frac{1}{2} [(1+1)^{2n+1} + (1-1)^{2n+1}] - 1 = 2^{2n} - 1, \end{aligned}$$

поэтому—сумма членовъ съ множителемъ $\frac{1}{2}$ будетъ:

$$-\frac{1}{2}(2^{2n} - 2) = -(2^{2n-1} - 1).$$

Можно далѣе видѣть, что сумма членовъ, имѣющихъ множителемъ $\frac{1}{p}$, есть также цѣлое число. Для этого замѣтимъ предварительно, что дробь $\frac{1}{p}$ входитъ въ выраженіе тѣхъ B . чиселъ, указатель которыхъ дѣлится на $(p-1)$, т. е. $B_{p-1}, B_{2(p-1)}, B_{3(p-1)}, \dots$. Поэтому въ (I) сумма членовъ съ множителемъ $\frac{1}{p}$, будетъ:

$$-R_p = -\frac{1}{p} [(2n+1)_{p-1} + (2n+1)_{2(p-1)} + (2n+1)_{3(p-1)} + \dots]$$

Пусть далѣе ω представляеть корень уравненія $x^{p-1}-1=0$, тогда сумма $\sum(1+\omega)^{2n+1}$, распространенная на всѣ корни уравненія, будемъ имѣть, на основаніи теоремы о симметрическихъ функціяхъ корней двучленнаго уравненія, такое значеніе:

$$(p-1)[1+(2n+1)_{p-1}+(2n+1)_{2(p-1)}+\dots]$$

Съ другой стороны, мы знаемъ, что сравненіе:

$$x^{p-1}-1 \equiv 0 \pmod{p}$$

имѣеть $(p-1)$ корней

$$\omega \equiv 1, 2, 3, \dots, (p-1) \pmod{p}$$

откуда

$$1+\omega \equiv 2, 3, 4, \dots, (p-1), 0 \pmod{p}$$

и

$$1+\sum(1+\omega)^{2n+1} \equiv 1^{2n+1}+2^{2n+1}+\dots+(p-1)^{2n+1} \pmod{p}$$

Такъ какъ $(2n+1)$, какъ число нечетное, на $(p-1)$ дѣлится не можетъ, то, по известной теоремѣ, имѣемъ:

$$1^{2n+1}+2^{2n+1}+3^{2n+1}+\dots+(p-1)^{2n+1} \equiv 0 \pmod{p}$$

слѣдовательно:

$$1+\sum(1+\omega)^{2n+1} \equiv 0 \pmod{p}$$

и

$$1+(p-1)[1+(2n+1)_{p-1}+(2n+1)_{2(p-1)}+\dots+(2n+1)_{2(p-1)}+\dots] \equiv 0 \pmod{p}$$

откуда

$$(2n+1)_{p-1}+(2n+1)_{2(p-1)}+(2n+1)_{2(p-1)}+\dots \equiv 0 \pmod{p}$$

Поэтому выраженіе R_p есть число цѣлое, откуда для вычисленія чиселъ A мы имѣемъ такое соотношеніе:

$$\begin{aligned} (2n+1)_2 A_2 + (2n+1)_4 A_4 + \dots + (2n+1)_{2n} A_{2n} &= \\ = 2^{2n+1} - 1 + n + R_3 + R_5 + \dots + R_p \end{aligned} \quad (II)$$

гдѣ сумма количествъ R распространяется на всѣ простые числа, не превышающія $(2n+1)$.

Такъ, при $n=1$, имѣемъ:

$$\frac{3.2}{1.2}A_1=2-1+1+\frac{1}{3}\cdot\frac{3.2}{1.2}=3; A_1=1,$$

$$B_1=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}$$

Полагая $n=2$, находимъ:

$$10+5A_2=8-1+2+\frac{1}{3}(10+5)+1; A_2=1$$

$$B_2=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)=-\frac{1}{30}.$$

Распространявъ способъ Эрмита на нѣкоторыя соотношенія между Б. числами, Штернь получилъ и другія формулы для вычисленія чиселъ A , подобныхъ ф. (II).

§ 40. Таблица значеній цѣлыхъ чиселъ A .

Небольшую таблицу значеній чиселъ A , называемыхъ иногда числами Штаудта, мы находимъ у Lucas, въ его «Théorie des nombres», именно:

$$A_0=A_2=A_4=\dots=A_{12}=+1; A_{2n+1}=0;$$

$$A_{14}=+2$$

$$A_{14}=-86579$$

$$A_{16}=-6$$

$$A_{16}=+1425518$$

$$A_{18}=+56$$

$$A_{18}=-27298230$$

$$A_{20}=-528$$

$$A_{20}=+601580875$$

$$A_{22}=+6193$$

$$A_{22}=-15116315766$$

По этой таблицѣ, при помощи теоремы Штаудта, можно находить значенія соответствующихъ Б. чиселъ.

§ 41. Теоремы Геллосchl.

Исходя изъ теоремы Штаудта, легко убѣдиться, что

$$x(x^{2^n}-1)B_{2^n}$$

есть число цѣлое при всякомъ цѣломъ значеніи x . Для доказательства достаточно показать, что $x(x^{2^n}-1)$ дѣлится на знамена-

теля числа B_n , т. е. на всѣ простые числа, которыя да, 1 превышаютъ дѣлителей числа $2n$. Пусть p есть одно изъ этихъ чиселъ; тогда, по теоремѣ Фермата:

$$x(x^{p-1}-1) \equiv 0 \pmod{p}$$

но $2n$ дѣлится на $(p-1)$ и потому:

$$x(x^{2n}-1) \equiv 0 \pmod{p},$$

т. е. дѣйствительно, при всякомъ цѣломъ x , $x(x^{2n}-1)B_n$ есть число цѣлое. Полагая здѣсь $x=2$, находимъ, что

$$2(2^{2n}-1)B_n$$

есть всегда число цѣлое. Отсюда слѣдуетъ, между прочимъ, что коэффициенты въ разложеніи $tg x$ по степенямъ x суть числа цѣлыя. Въ самомъ дѣлѣ, по § 4 гл. I:

$$tg x = 2^2(2^2-1)B_2 \frac{x}{1.2} - 2^4(2^4-1)B_4 \frac{x^3}{1.2.3.4} + \dots$$

означая $2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}$ чрезъ T_{2n-1} , имѣемъ слѣдовательно:

$$tg x = T_1 \frac{x}{1.2} - T_3 \frac{x^3}{1.2.3.4} + T_5 \frac{x^5}{1.2.3.4.5.6} - \dots$$

гдѣ T —цѣлыя числа. Замѣтимъ, что въ этомъ можно убѣдиться и иными способами; такъ, это непосредственно слѣдуетъ изъ ф. А. Genocchi (гл. II, § 13).

$$B_n = \frac{2n}{2^{2n}-1} \cdot \frac{1}{2^m} \left\{ (m)_1 - (m)_2 (2^{2n-1}-1) + (m)_3 (3^{2n-1}-2^{2n-1}+1) - \dots \right. \\ \left. + (-1)^m [(m-1)^{2n-1} - (m-2)^{2n-1} + \dots + (-1)^m] \right\}$$

Какъ мы видѣли, здѣсь m должно быть болѣе $(2n-1)$; полагая $m=2n$, видимъ, что $T_{2n-1} = 2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}$ есть число цѣлое. При помощи той-же формулы А. Genocchi впервые доказалъ, что и числа вида $2(2^{2n}-1)B_{2n}$, которыя входятъ въ качествѣ коэффициентовъ въ разложеніе функции $tg\left(\frac{x}{2}\right)$, суть цѣлыя; поэтому и

теорему общаго характера, именно, что $x(x^{2^n}-1)B_{2^n}$ есть цѣлое число, называютъ теоремою Геносчи, а числа вида $2(2^{2^n}-1)B_{2^n}$ — числами Геносчи. Они обладают многими замѣчательными свойствами и потому наряду съ числами Я. Бернулли подвергались изученію.

§ 42. Теоремы Коши.

Положимъ, что въ той-же формулѣ Геносчи m есть простое нечетное число. Тогда

$$2^m(2^{2^n}-1)B_{2^n} \equiv -2n[(m-1)^{2^n-1} + (m-2)^{2^n-1} + \dots + (-1)^m] \pmod{m}$$

Но

$$(m-1)^{2^n-1} \equiv -1, \quad (m-2)^{2^n-1} \equiv -2^{2^n-1} \dots \pmod{m}$$

и потому:

$$(m-1)^{2^n-1} + (m-2)^{2^n-1} + (m-3)^{2^n-1} + \dots + 1 \equiv 0 \pmod{m}.$$

Умноживъ это сравненіе на $-2n$, и приложивъ къ предыдущему, имѣемъ:

$$2^m(2^{2^n}-1)B_{2^n} \equiv -2n[(m-1)^{2^n-1} + (m-3)^{2^n-1} + \dots + 4^{2^n-1} + 2^{2^n-1}] \pmod{m}$$

или, такъ какъ $2^m \equiv 2 \pmod{m}$, то

$$2(2^{2^n}-1)B_{2^n} \equiv -2n \cdot 2^{2^n} [1 + 2^{2^n-1} + 3^{2^n-1} + \dots + \left(\frac{m-1}{2}\right)^{2^n-1}] \pmod{m} \quad (I)$$

Пусть $m=4n-1$, откуда $2n = \frac{m+1}{2}$, $2n-1 = \frac{m-1}{2}$.

Тогда сравненіе (I) приметъ видъ:

$$2(2^{\frac{m+1}{2}}-1)B_{\frac{m+1}{2}} \equiv -\left(\frac{m+1}{2}\right)2^{\frac{m+1}{2}} \left[1 + 2^{\frac{m-1}{2}} + \dots + \left(\frac{m-1}{2}\right)^{\frac{m-1}{2}} \right] \pmod{m}$$

Но

$$2^{\frac{m+1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{m^2-1}{8}} \equiv (-1)^{\frac{16m^2-8m}{8}} \equiv (-1)^{\frac{m+4}{4}} \pmod{m}.$$

поэтому:

$$2(2^{\frac{m+1}{2}} - 1) \frac{B_{m+1}}{2} \equiv -(m+1)(-1)^{\frac{m+1}{4}} \left[1 + 2^{\frac{m-1}{2}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \left(\frac{m-1}{2}\right)^{\frac{m-1}{2}} \right] \pmod{m}$$

или

$$2(2^{\frac{m+1}{2}} - 1) \frac{B_{m+1}}{2} \equiv -(-1)^{\frac{m+1}{4}} \left[1 + 2^{\frac{m-1}{2}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \left(\frac{m-1}{2}\right)^{\frac{m-1}{2}} \right] \pmod{m}$$

Такъ какъ

$$2^{\frac{m-1}{2}} \equiv \left(\frac{2}{m}\right), \quad 3^{\frac{m-1}{2}} \equiv \left(\frac{3}{m}\right) \dots \pmod{m}$$

то, означая число квадратичныхъ вычетовъ въ рядѣ:

$$1, 2, 3, \dots, \frac{m-1}{2}$$

чрезъ N , а неквадратичныхъ—чрезъ N' , имѣемъ:

$$2(2^{\frac{m+1}{2}} - 1) \frac{B_{m+1}}{2} \equiv -(-1)^{\frac{m+1}{4}} (N - N') \pmod{m} \quad (\text{II})$$

Это замѣчательное предложеніе иначе было доказано Коши *), приведенное же доказательство принадлежитъ Genocchi. Пусть для примѣра, $m=11$, тогда въ рядѣ чиселъ до $\frac{m-1}{2}$ включительно имѣемъ:

*) Mém. de l'Institut, 1840.

$$\left(\frac{1}{11}\right) = \left(\frac{3}{11}\right) = \left(\frac{4}{11}\right) = \left(\frac{5}{11}\right) = +1, \quad \left(\frac{2}{11}\right) = -1,$$

т.-е. $N=4$, $N'=1$. Отсюда:

$$2(2^4-1)B_4 \equiv -(-1)^4(4-1) \pmod{11}$$

подставляя $B_4 = \frac{1}{42}$, убеждаемся въ справедливости послѣдняго сравненія.

Положимъ еще въ сравненіи (I) $m = 2n + 3$; $2n = m - 3$. Получимъ:

$$2(2^{m-3}-1)B_{m-3} \equiv 3 \cdot 2^{m-3} \left[1 + 2^{m-4} + \dots + \left(\frac{m-1}{2}\right)^{m-4} \right] \pmod{m}$$

Разсматривая это сравненіе, заключаемъ, что если сумма

$$1 + 2^{m-4} + \dots + \left(\frac{m-1}{2}\right)^{m-4}$$

дѣлится на m , то непременно числитель B_{m-3} долженъ дѣлиться на m . Это позволяетъ установить нѣкоторую связь между B -членами и послѣднимъ предложеніемъ Фермата. Именно, какъ доказалъ Коши*), неопредѣленное уравненіе Фермата:

$$x^m + y^m + z^m = 0$$

не можетъ быть рѣшено въ числахъ цѣлыхъ, взаимно простыхъ между собой и съ m , пока сумма

$$\left[1 + 2^{m-4} + \dots + \left(\frac{m-1}{2}\right)^{m-4} \right]$$

не дѣлится на m ; слѣдовательно, можно утверждать, что тому же уравненію нельзя удовлетворить указаннымъ образомъ, если числитель B_{m-3} не дѣлится на m .

§ 43. Теорема и таблица Adams'а.

Изъ формулы А. Genocchi слѣдуетъ еще:

$$2^n(2^n-1)B_{2n} \equiv 0 \pmod{2n}$$

*) Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences, 1847.

или

$$2^{m-1}(2^m-1)B_{2,n} \equiv 0 \pmod{n}$$

Положимъ, что n —число простое, тогда;

$$(2^m-1)B_{2,n} \equiv 0 \pmod{n}$$

или

$$(2^n+1)(2^n-1)B_{2,n} \equiv 0 \pmod{n}$$

Такъ какъ при n простомъ (2^n+1) и (2^n-1) не могутъ дѣлиться на n , то очевидно, что числитель $B_{2,n}$ долженъ дѣлиться на n . Такъ, числитель B_{10} долженъ дѣлиться на 5, числитель B_{14} на 7 и дѣйствительно: $B_{10} = \frac{5}{66}$, $B_{14} = \frac{7}{6}$. Это предложеніе часто называютъ 1-й теоремой Adams'а, который далъ ее безъ доказательства въ 85 т. журнала Крелля. Тамъ же указано и другое болѣе общее свойство Б. чиселъ, которое мы выведемъ нѣсколько позже, и помѣщена таблица ихъ значеній, которую Adams довелъ до B_{14} , причемъ тщательно провѣрилъ и всѣ ранѣе вычисленные значенія Бернуллиевыхъ чиселъ.

§ 44. Теорема Г. О. Вороного.

Ко многимъ весьма важнымъ заключеніямъ относительно Б. чиселъ, именно относительно состава ихъ числителей, приводитъ теорема, предложенная Г. О. Воронымъ и заключающая въ себѣ теоремы Adams'а, какъ частный случай.

Теорема эта основывается на слѣдующихъ двухъ леммахъ.

1) Если назовемъ числителя и знаменателя Б. числа соответственно $P_{2,n}$ и $Q_{2,n}$ такъ что $B_{2,n} = \frac{P_{2,n}}{Q_{2,n}}$ — дробь несократимая и $S_{2,n}(x)$ — Б. функція при цѣломъ значеніи x , то имѣетъ мѣсто сравненіе:

$$P_{2,n} \cdot x \equiv Q_{2,n} \cdot S_{2,n}(x) \pmod{x^n}$$

Дѣйствительно:

*) Извѣстія Харьковскаго Матем. Общества 1890 г.

$$S_{2n}(x) = 1^{2n} + 2^{2n} + \dots + (x-1)^{2n} = \\ = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + B_1 x^{2n} + \frac{2n}{1 \cdot 2} B_2 x^{2n-1} + \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} B_3 x^{2n-3} + \dots \\ \dots + \frac{2n(2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} B_{2n-2} x^3 + B_{2n} x \quad (I)$$

Положимъ, что $(2n+1)$ и x имѣютъ общаго наибольшаго дѣлителя d , такъ что $2n+1 = a \cdot d$, $x = b \cdot d$, а и x — числа взаимно-простыя. Пусть, далѣе, Q означаетъ наименьшее кратное знаменателей всѣхъ B чиселъ, входящихъ въ разложение $S_{2n}(x)$; тогда умножая обѣ части (I) на $a \cdot Q$, получимъ:

$$S_{2n}(x) \cdot aQ = x^{2n} \cdot bQ + B_1 x^{2n} aQ + \frac{(2n+1)2n}{1 \cdot 2} B_2 x^{2n-1} \cdot bQ + \\ + (2n+1) B_3 x^{2n-3} bQ + \dots + \frac{2n(2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} B_{2n-2} x^3 aQ + B_{2n} x \cdot aQ.$$

Такъ какъ въ правой части этого равенства все числа дѣльны и всѣ члены, кромѣ послѣдняго, имѣютъ множителемъ x^3 , то можемъ разсматривать его, какъ сравненіе:

$$S_{2n}(x) \cdot aQ \equiv B_{2n} x \cdot aQ \pmod{x^3}$$

или, такъ какъ a число взаимно-простое съ x , то

$$S_{2n}(x) \cdot Q \equiv B_{2n} x \cdot Q \pmod{x^3}$$

Умножимъ обѣ части сравненія на $2 \cdot 3$, тогда:

$$2 \cdot 3 \cdot Q S_{2n}(x) \equiv 2 \cdot 3 \cdot Q B_{2n} x \pmod{x^3}$$

Пусть $Q = Q' \cdot Q_{2n}$; такъ какъ Q_{2n} по теоремѣ Штаудта дѣлится на $2 \cdot 3$, а Q есть наименьшее кратное знаменателей Q_1, Q_2, \dots, Q_{2n} , то Q' не дѣлится на $2 \cdot 3$. Заменяя B_{2n} чрезъ $\frac{P_{2n}}{Q_{2n}}$, а Q — чрезъ $Q' \cdot Q_{2n}$ получимъ сравненіе:

$$2 \cdot 3 \cdot Q' \cdot Q_{2n} \cdot S_{2n}(x) \equiv 2 \cdot 3 \cdot Q' \cdot P_{2n} \cdot x \pmod{x^3}$$

Число $2 \cdot 3 \cdot Q'$ есть произведеніе нѣсколькихъ простыхъ чиселъ, входящихъ въ него въ 1-й степени; допуская, что между ними есть дѣлители числа x , все-таки можемъ написать сравненіе:

$$P_{i,n} \cdot x \equiv Q_{i,n} \cdot S_{i,n}(x) \pmod{x^n}$$

Такъ, при $n=1$,

$$B_1 = \frac{P_1}{Q_1} = \frac{1}{6}; \quad S_1(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}$$

отсюда:

$$6S_1(x) \equiv x \pmod{x^2}$$

или

$$P_1 \cdot x \equiv Q_1 \cdot S_1(x) \pmod{x^2}$$

2. Если a и x числа цѣлыя, положительныя и взаимно-простыя, то при $m > 1$, имѣетъ мѣсто сравненіе:

$$(a^m - 1)S_m(x) \equiv ma^{m-1}x \sum_{i=1}^{i=x-1} i^{m-1} E \frac{ai}{x} \pmod{x^2}$$

гдѣ $E \frac{ai}{x}$ — цѣлая часть дроби $\frac{ai}{x}$.

Для доказательства возьмемъ рядъ равенствъ:

$$a = x \cdot E \frac{a}{x} + r_1$$

$$2a = x \cdot E \frac{2a}{x} + r_2$$

.....

$$(x-1)a = x \cdot E \frac{(x-1)a}{x} + r_{x-1}$$

Здѣсь числа r_1, r_2, \dots, r_{x-1} , какъ меньшія x и различныя между собою, очевидно, представляютъ рядъ чиселъ 1, 2, 3... $(x-1)$, только иначе расположенныхъ. Переписывая полученные равенства въ иномъ порядкѣ, имѣемъ:

$$a - x \cdot E \frac{a}{x} = r_1$$

$$2a - x \cdot E \frac{2a}{x} = r_2$$

.....

$$(x-1)a - x \cdot E \frac{x-1}{x} = r_{x-1},$$

Умножая обѣ части 1-го сравненія на $(a^{2n}-1)$, а 2-го на Q_{2n} и вычитая 2-е сравненіе изъ 1-го находимъ:

$$P_{2n}x(a^{2n}-1) \equiv 2na^{2n-1}x Q_{2n} \sum_{i=1}^{i=x-1} i^{2n-1} E \frac{ai}{x} \pmod{x^2}$$

или, сокращая обѣ части сравненія и модуль на x ,

$$P_{2n}(a^{2n}-1) \equiv 2n \cdot a^{2n-1} Q_{2n} \sum_{i=1}^{i=x-1} i^{2n-1} E \frac{ai}{x} \pmod{x} \quad (A)$$

что и слѣдовало доказать.

§ 45. Слѣдствія теоремы.

Полагая въ формулѣ Г. Θ. Вороного $x=n$, найдемъ:

$$P_{2n}(a^{2n}-1) \equiv 0 \pmod{n} \quad (I)$$

гдѣ a и n —числа взаимно-простыя. Если здѣсь n —число простое, то не должно имѣть мѣста сравненіе

$$a^{2n}-1 \equiv 0 \pmod{n}$$

въ чемъ убѣждаемся, представляя лѣвую часть его въ видѣ:

$$(a^n+1)(a^n-1)$$

и потому имѣемъ:

$$P_{2n} \equiv 0 \pmod{n}$$

Такимъ образомъ, мы вновь доказали 1-е предложеніе Adams'a (§ 43); согласно съ нимъ, напр., числитель B числа B_{24} —долженъ дѣлиться на 17, и въ самомъ дѣлѣ, по таблицѣ Adams'a

$$P_{24} = 2577687858367$$

—число дѣлящееся на 17 и т. п.

Далѣе, пусть $k=p_1^{\alpha} p_2^{\beta} \dots p_l^{\lambda}$ —нѣкоторый дѣлитель числа n , гдѣ p_1, p_2, \dots, p_l —простыя числа такого свойства, что $2n$ не дѣлится на $p_1-1, p_2-1, \dots, p_l-1$. Тогда, если означимъ чрезъ a_i первообразный корень числа p_i , не должно имѣть мѣста сравненіе:

$$(a_1^{2n}-1) \equiv 0 \pmod{p_1}$$

а потому въ силу сравненія (I) найдемъ

$$P_{1,n} \equiv 0 \pmod{p_1^{\alpha}}$$

Совершенно также, если назовемъ a_2 первообразный корень простого числа p_2 и поставимъ его въ (I) вмѣсто a , то прійдемъ къ сравненію

$$P_{1,n}(a_2^{2n}-1) \equiv 0 \pmod{p_2^{\beta}}$$

откуда

$$P_{1,n} \equiv 0 \pmod{p_2^{\beta}}$$

Точно также докажемъ, что

$$P_{1,n} \equiv 0 \pmod{p_3^{\gamma}}$$

$$P_{1,n} \equiv 0 \pmod{p_i^{\lambda}}$$

Отсюда:

$$P_{1,n} \equiv 0 \pmod{p_1^{\alpha} p_2^{\beta} \dots p_i^{\lambda}}$$

или

$$P_{1,n} \equiv 0 \pmod{k} \quad (\text{II})$$

Но такъ какъ $p_1-1, p_2-1, \dots, p_i-1$ не дѣлятъ $2n$, то по теоремѣ Штаудта, числа p_1, p_2, \dots не могутъ войти въ знаменатель числа $B_{1,n}$. Слѣдовательно, доказанное свойство Б. чиселъ можно формулировать такъ: Если n имѣетъ дѣлителемъ $k=p_1^{\alpha} p_2^{\beta} \dots p_i^{\lambda}$, гдѣ p_1, p_2, \dots, p_i —такія простые числа, которыя не дѣлятъ знаменателя числа $B_{1,n}$, то числитель его будетъ дѣлиться на k . Поэтому, если возьмемъ какое-либо число n , и разложивъ его на простые множители, исключимъ тѣ изъ нихъ, которые входятъ въ составъ знаменателя Б. числа $B_{1,n}$, произведение остальныхъ множителей будетъ дѣлить числитель $B_{1,n}$. Это свойство Б. чиселъ было доказано еще Штаудтомъ во 2-й изъ упомянутыхъ брошюръ его: «De numeris Bernullianis, commentatio II», въ § 8. Однако, вслѣдствіе рѣдкости этой брошюры, оно долго оставалось неизвѣстнымъ; только уже Adams при вычисленіи своей таблицы чиселъ Я.Бернулли вновь замѣтилъ частный случай этого свойства, именно, что если p —простой дѣлитель числа n —не входитъ въ знамена-

тель числа B_n , то числитель того же числа дѣлится на p . Какъ и другое свое предположеніе (см. § 43), Adams и эту свою теорему высказалъ безъ доказательства въ 85 т. журнала Бреэля, гдѣ онъ далъ таблицу чиселъ Я. Бернулли. Мы приводимъ здѣсь доказательство предположенія Штаудта, принадлежащее Г. О. Вороному, потому что оно проще доказательства, даннаго самимъ Штаудтомъ, и вытекаетъ изъ теоремы общаго характера.

На основаніи доказаннаго свойства, мы заключаемъ, напр., что числитель B_{25} долженъ дѣлиться на 25, такъ какъ здѣсь $n=5^2$, между тѣмъ 5 не войдетъ въ знаменатель этого числа, ибо дѣлители 50 суть 1, 2, 5, 10, 25, 50 и слѣдовательно $Q_{50}=2.3.11$. Дѣйствительно, по таблицѣ Adams'a

$$P_{50}=495057\ 20524\ 10796\ 48124\ 77525$$

— дѣлится на 25.

Точно также при $n=22$, замѣчаемъ, что въ знаменателѣ числа B_{22} не должно быть 11, такъ какъ дѣлители 44 суть 1, 2, 4, 11, 22, 44 и потому $Q_{44}=2.3.5.23=690$. Поэтому P_{44} должно дѣлиться на 11, дѣйствительно:

$$P_{44}=278\ 33269\ 57930\ 10242\ 35023$$

— число, дѣлящееся на 11.

§ 46. Формула профессора Н. В. Бугаева.

Последнее по времени изъ извѣстныхъ независимыхъ выраженій Б. числа было дано профессоромъ Н. В. Бугаевымъ и представляетъ примѣръ примѣръ приложенія въ теоріи чиселъ Я. Бернулли началъ «Ученія о числовыхъ производныхъ», трудами Н. В. Бугаева въ последнее время выдвинутого въ науку. Это выраженіе, представляющее Б. число при помощи безконечнаго произведенія, мы находимъ въ брошюрѣ Н. В. Бугаева: «Свойства одного числового интеграла по дѣлителямъ» 1888 г.

Для полученія этой формулы мы должны воспользоваться свойствами извѣстной числовой функціи $q(n)$, которая опредѣляется какъ числовая производная другой функціи $\pi(n)$, обладающей свойствомъ обращаться въ 1 при $n=1$ и въ 0 — при всакомъ иномъ аргументѣ:

$$\pi(1)=1, \pi(2)=0, \dots \pi(n)=0$$

Итакъ, пользуясь обозначеніями теоріи числовыхъ производныхъ, имѣемъ:

$$q(n)=D\pi(n)=\pi[\varphi n],$$

откуда, давая n различныя значенія, легко находимъ свойства функціи $q(n)$. Такъ, при $n=1$ имѣемъ:

$$q(1)=\pi\varphi(1)=1;$$

когда $n=a$, гдѣ a — число абсолютно простое, то

$$q(a)=\pi[\varphi a]=\pi a - \pi 1 = -1$$

$$q(a^2)=\pi[\varphi a^2]=\pi a^2 - \pi a = 0$$

$$\dots\dots\dots$$

$$q(a^n)=\pi[\varphi a^n]=\pi a^n - \pi a^{n-1} = 0.$$

Слѣдовательно, для всякаго числа, въ которое входитъ хоть одинъ простой множитель въ степени, большей чѣмъ 1, $q(n)=0$. Наоборотъ, для чиселъ вида $n=abcd\dots k$, гдѣ $a, b, c, \dots k$ — числа абсолютно простые, $q(n)=+1$ или -1 , въ зависимости отъ числа простыхъ множителей. Дѣйствительно:

$$q(a)=-1, \quad q(ab)=\pi[\varphi ab]=\pi[(a-1)(b-1)]=1,$$

$$q(abc)=\pi[\varphi abc]=-1$$

и т. д.

Припомнимъ свойства функціи $q(n)$, возьмемъ формулу, выражающую связь между двумя бесконечными рядами:

$$\sum_{u=1}^{u=\infty} \frac{\psi_1(u)}{u^\mu} \cdot \sum_{u=1}^{u=\infty} \frac{\psi_2(u)}{u^\mu} = \sum_{u=1}^{u=\infty} \frac{\sum_{d|u} \psi_1(d) \psi_2(\frac{u}{d})}{u^\mu} \quad (I)$$

гдѣ

$$\sum_{u=1}^{u=\infty} \frac{\theta(u)}{u^\mu} = \frac{\theta(1)}{1^\mu} + \frac{\theta(2)}{2^\mu} + \frac{\theta(3)}{3^\mu} + \dots$$

а $\sum_u \psi_1(d) \psi_2(\delta)$ означает сумму, взятую для всех дѣлителей числа u , причемъ d и δ —дополнительные дѣлители этого числа. Пусть $\psi_2(n)=1$, тогда (I) приметъ видъ:

$$\prod_1^{\infty} \frac{\psi_1(u)}{u^{\mu}} \cdot \prod_1^{\infty} \frac{1}{u^{\mu}} = S \frac{\sum_u \psi_1(d)}{u^{\mu}}$$

если-же положимъ:

$$\sum_u \psi_1(d) = \psi(u)$$

то послѣднее равенство дасть:

$$\prod_1^{\infty} \frac{\psi(u)}{u^{\mu}} = \prod_1^{\infty} \frac{D \psi(u)}{u^{\mu}} \cdot \prod_1^{\infty} \frac{1}{u^{\mu}}$$

Полагая $\psi(u) = \pi(u)$, имѣемъ отсюда:

$$\prod_1^{\infty} \frac{\pi(u)}{u^{\mu}} = \prod_1^{\infty} \frac{q(u)}{u^{\mu}} \cdot \prod_1^{\infty} \frac{1}{u^{\mu}}$$

что, по свойству функціи $q(n)$, даетъ соотношеніе:

$$\prod_1^{\infty} \frac{q(u)}{u^{\mu}} = 1 : \prod_1^{\infty} \frac{1}{u^{\mu}} \quad (\text{II})$$

Дифференцируя (II) по μ , находимъ:

$$-\prod_1^{\infty} \frac{q(u)l(u)}{u^{\mu}} = \prod_1^{\infty} \frac{l(u)}{u^{\mu}} : \left[\prod_1^{\infty} \frac{1}{u^{\mu}} \right],$$

или

$$-\prod_1^{\infty} \frac{q(u)l(u)}{u^{\mu}} \cdot \prod_1^{\infty} \frac{1}{u^{\mu}} = \prod_1^{\infty} \frac{l(u)}{u^{\mu}} \cdot \prod_1^{\infty} \frac{1}{u^{\mu}}$$

Преобразуя лѣвую часть этого равенства на основаніи (I), имѣемъ:

$$-\sum_1^{\infty} \left[\frac{1}{u^{\mu}} \sum_n q(d) l(d) \right] = \sum_1^{\infty} \frac{l(u)}{u^{\mu}} : \sum_1^{\infty} \frac{1}{u^{\mu}} \quad (\text{III})$$

Но, какъ показалъ въ вышеупомянутой брошюрѣ Н В. Бугаевъ*), свойство числового интеграла по дѣлителямъ $\sum_n q(d) l(d)$ выражается слѣдующей таблицей:

$$\begin{aligned} \sum_1 q(d) l(d) &= 0, \\ \sum_a q(d) l(d) &= -la, \\ \sum_a^{\mu} q(d) l(d) &= -l(a) \\ \sum_{a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}} q(d) l(d) &= 0 \end{aligned}$$

т.-е. этотъ интегралъ не обращается въ 0 лишь для простыхъ чиселъ a и ихъ степеней. Поэтому, на основаніи (III), получаемъ для $\mu > 1$:

$$S_{a^{\mu}}^{la} + S_{a^{2\mu}}^{la} + S_{a^{3\mu}}^{la} + \dots = \sum_1^{\infty} \frac{l(u)}{u^{\mu}} : \sum_1^{\infty} \frac{1}{u^{\mu}}$$

гдѣ знакъ \sum въ лѣвой части равенства распространяется на всѣ абсолютно-простыя числа a . Отсюда:

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{u^{\mu}} = \sum_1^{\infty} \frac{l(u)}{u^{\mu}} : \sum_1^{\infty} \frac{l(a)}{a^{\mu-1}} \quad (\text{IV})$$

Но, какъ мы знаемъ

$$B_{2n} = 2 (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 2 \dots 2n}{(2\pi)^{2n}} \cdot \sum_1^{\infty} \frac{1}{u^{2n}},$$

*) Стр. 11.

а $\sum_u \psi_1(d) \psi_2(\delta)$ означает сумму, взятую для всех дѣлителей числа u , причемъ d и δ —дополнительные дѣлители этого числа. Пусть $\psi_2(n)=1$, тогда (I) приметъ видъ:

$$S_1^{\infty} \frac{\psi_1 u}{u^\mu} \cdot S_1^{\infty} \frac{1}{u^\mu} = S^{\infty} \frac{\sum_u \psi_1(d)}{u^\mu}$$

если-же положимъ:

$$\sum_u \psi_1(d) = \psi(u)$$

то послѣднее равенство дастъ:

$$S_1^{\infty} \frac{\psi u}{u^\mu} = S_1^{\infty} \frac{D \psi u}{u^\mu} \cdot S_1^{\infty} \frac{1}{u^\mu}$$

Полагая $\psi(u) = \pi(u)$, имѣемъ отсюда:

$$S_1^{\infty} \frac{\pi(u)}{u^\mu} = S_1^{\infty} \frac{q(u)}{u^\mu} \cdot S_1^{\infty} \frac{1}{u^\mu}$$

что, по свойству функціи $q(n)$, даетъ соотношение:

$$S_1^{\infty} \frac{q(u)}{u^\mu} = 1 : S_1^{\infty} \frac{1}{u^\mu} \quad (\text{II})$$

Дифференцируя (II) по μ , находимъ:

$$-S_1^{\infty} \frac{q(u) l(u)}{u^\mu} = S_1^{\infty} \frac{l(u)}{u^\mu} : \left[S_1^{\infty} \frac{1}{u^\mu} \right],$$

или

$$-S_1^{\infty} \frac{q(u) l(u)}{u^\mu} \cdot S_1^{\infty} \frac{1}{u^\mu} = S_1^{\infty} \frac{l(u)}{u^\mu} \cdot S_1^{\infty} \frac{1}{u^\mu}$$

Преобразуя лѣвую часть этого равенства на основаніи (I), имѣемъ:

$$-\sum_1^{\infty} \left[\frac{1}{u^{\mu}} \sum_a q(d) l(d) \right] = \sum_1^{\infty} \frac{l(u)}{u^{\mu}} : \sum_1^{\infty} \frac{1}{u^{\mu}} \quad (\text{III})$$

Но, какъ показалъ въ вышеупомянутой брошюрѣ Н В. Бугаевъ*), свойство числового интеграла по дѣлителямъ $\sum_a q(d) l(d)$ выражается слѣдующей таблицей:

$$\begin{aligned} \sum_a q(d) l(d) &= 0, \\ \sum_a q(d) l(d) &= -la, \\ \sum_a^{\mu} q(d) l(d) &= -l(a) \\ \sum_{a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}} q(d) l(d) &= 0 \end{aligned}$$

т.-е. этотъ интегралъ не обращается въ 0 лишь для простыхъ чиселъ a и ихъ степеней. Поэтому, на основаніи (III), получаемъ для $\mu > 1$:

$$S_a^{la} + S_a^{la} + S_a^{la} + \dots = \sum_1^{\infty} \frac{l(u)}{u^{\mu}} : \sum_1^{\infty} \frac{1}{u^{\mu}}$$

гдѣ знакъ S въ лѣвой части равенства распространяется на всѣ абсолютно-простыя числа a . Отсюда:

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{u^{\mu}} = \sum_1^{\infty} \frac{l(u)}{u^{\mu}} : \sum_1^{\infty} \frac{l(a)}{a^{\mu-1}} \quad (\text{IV})$$

Но, какъ мы знаемъ

$$B_{2n} = 2 (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 2 \dots 2n}{(2\pi)^{2n}} \cdot \sum_1^{\infty} \frac{1}{u^{2n}},$$

*) Стр. 11.

поэтому, въ силу равенства (IV), имѣемъ:

$$(III) \quad B_{2n} = 2 \cdot (-1)^{n+1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \dots 2n}{(2\pi)^{2n}} \cdot \frac{\sum_{u=1}^{\infty} \frac{l(u)}{u^{2n}}}{\sum_{a=1}^{\infty} \frac{la}{a^{2n}-1}} \quad (VI)$$

и такъ какъ:

$$\sum_{u=1}^{\infty} \frac{l(u)}{u^{2n}} = \sum_{u=1}^{\infty} \frac{1}{l(u^{2n})} = l \prod_{u=1}^{\infty} (u^{\frac{1}{u^{2n}}})$$

$$\sum_{a=1}^{\infty} \frac{l(a)}{a^{2n}-1} = \sum_{a=1}^{\infty} \frac{1}{l(a^{\frac{1}{a^{2n}-1}})} = l \prod_{a=1}^{\infty} (a^{\frac{1}{a^{2n}-1}})$$

то мы находимъ слѣдующее замѣчательное выраженіе для B. числа въ формѣ безконечнаго произведенія:

$$B_{2n} = 2 \cdot (-1)^{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \cdot \frac{l[2^{\frac{1}{2^{2n}}} \cdot 3^{\frac{1}{3^{2n}}} \cdot 4^{\frac{1}{4^{2n}}} \cdot 5^{\frac{1}{5^{2n}}} \cdot 6^{\frac{1}{6^{2n}}} \dots]}{l[2^{\frac{1}{2^{2n}-1}} \cdot 3^{\frac{1}{3^{2n}-1}} \cdot 5^{\frac{1}{5^{2n}-1}} \cdot 7^{\frac{1}{7^{2n}-1}} \dots]} \quad (VI)$$

Такъ, при $n=1$, имѣемъ:

$$B_2 = 2 \cdot \frac{1 \cdot 2}{2^2 \pi^2} \cdot \frac{l[2^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{9}} \cdot 4^{\frac{1}{16}} \cdot 5^{\frac{1}{25}} \cdot 6^{\frac{1}{36}} \dots]}{l[2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{8}} \cdot 5^{\frac{1}{24}} \cdot 7^{\frac{1}{48}} \cdot 11^{\frac{1}{120}} \dots]}$$

и такъ какъ $B_2 = \frac{1}{6}$, то отсюда получимъ такое выраженіе для $\frac{\pi^2}{6}$:

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{l[2^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{9}} \cdot 4^{\frac{1}{16}} \dots]}{l[2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{8}} \cdot 5^{\frac{1}{24}} \dots]}$$

Формула (VI) была помѣщена съ краткимъ выводомъ въ «Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris» CVI, № 19, 1888. Послѣ этого математикъ Сésaro, известный нѣкоторыми трудами по теоріи чиселъ, предложилъ другой ея выводъ, стоящій въ связи съ его собственными изслѣдованіями въ области числовыхъ функцій; его мы, однако, приводить не будемъ.

Замѣтимъ еще по поводу ф. (VI), что сравнивая ее съ другимъ выраженіемъ Б. числа при помощи безконечнаго произведенія:

$$B_{2n} = 2 \cdot (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 2 \dots 2n}{(2\pi)^{2n}} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^{2n}}\right) \left(1 - \frac{1}{3^{2n}}\right) \left(1 - \frac{1}{5^{2n}}\right)}$$

которое мы имѣли въ I-й главѣ, приходимъ къ слѣдующему замѣчательному соотношенію:

$$\begin{aligned} & l \left[2^{\frac{1}{2^{2n}}} \cdot 3^{\frac{1}{3^{2n}}} \cdot 4^{\frac{1}{4^{2n}}} \cdot 5^{\frac{1}{5^{2n}}} \dots \right] \left(1 - \frac{1}{2^{2n}} \right) \left(1 - \frac{1}{3^{2n}} \right) \left(1 - \frac{1}{5^{2n}} \right) \dots = \\ & = l \left[2^{\frac{1}{2^{2n}-1}} \cdot 3^{\frac{1}{3^{2n}-1}} \cdot 5^{\frac{1}{5^{2n}-1}} \cdot 7^{\frac{1}{7^{2n}-1}} \cdot 11^{\frac{1}{11^{2n}-1}} \dots \right] \end{aligned}$$

§ 47. Замѣчаніе о числахъ Эйлера. Заключение.

Согласно съ поставленной задачей, мы изложили въ главныхъ и существенныхъ чертахъ все то, что написано до сихъ поръ о Бернуллиевыхъ числахъ и изъ чего должна образоваться ихъ стройная теорія. Ближайшимъ слѣдствіемъ успѣшнаго изученія Б. чиселъ было то, что стали изучать и другія группы числовыхъ коэффициентовъ, представляющихъ по своимъ свойствамъ и происхожденію аналогію съ числами Я. Бернулли. При этомъ обнаружилось, что наиболѣе близкое и полное сходство съ Б. числами представляютъ Эйлеровы числа, или коэффициенты въ разложеніи по степенямъ x функціи $\sec x$:

$$\sec x = 1 + E_2 \frac{x^2}{1 \cdot 2} + E_4 \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + E_6 \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots \quad (a)$$

Названіе Эйлеровыхъ имъ дано въ честь Эйлера, который первый обратилъ на нихъ вниманіе. Эти числа обыкновенно изуча-

лись параллельно съ числами Я. Бернулли и потому мы вкратцѣ перечислимъ ихъ свойства.

Подобно числамъ Я. Бернулли, эти числа допускаютъ между собой различныя соотношенія, изъ которыхъ и могутъ быть послѣдовательно вычислены. Такъ, замѣняя въ разложеніи (а) $\sec x$ чрезъ $\frac{1}{\cos x}$ и разлагая $\cos x$ въ рядъ, находимъ чрезъ сравненіе коэффициентовъ при x^{2n} такое соотношеніе:

$$1 - (2n)_2 E_2 + (2n)_4 E_4 - \dots + (-1)^n E_{2n} = 0,$$

откуда слѣдуетъ, что числа Эйлера суть цѣлыя числа; въ этомъ заключается ихъ главное отличіе отъ Б. чиселъ.

Подобно тому, какъ числа Я. Бернулли могутъ быть опредѣлены какъ коэффициенты въ разложеніи функціи $\frac{x}{e^x - 1}$, Эйлеровы числа опредѣляются разложеніемъ въ рядъ по степенямъ x функціи:

$$\frac{2}{e^x + e^{-x}} = 1 - E_2 \frac{x^2}{1 \cdot 2} + E_4 \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - E_6 \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots$$

Это даетъ возможность установить связь между числами Эйлера и Я. Бернулли, пользуясь тождествомъ:

$$\frac{2 \cdot e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{2}{e^{2x} - 1} - \frac{4}{e^{4x} - 1}$$

или:

$$\begin{aligned} & \left(1 - E_2 \frac{x^2}{1 \cdot 2} + E_4 \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots \right) \left(1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} - \dots \right) = \\ & = 2 \left(\frac{1}{2x} + B_1 + B_2 \frac{2x}{1 \cdot 2} + B_3 \frac{2^3 x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \right) - \\ & - 4 \left(\frac{1}{4x} + B_1 + B_2 \frac{4x}{1 \cdot 2} + B_3 \frac{4^3 x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \right) \end{aligned}$$

Именно, сравнивая здѣсь коэффициенты при x^{2n-1} , имѣемъ:

$$\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n} B_{2n} = (-1)^{n+1} [(2n-1)_1 E_{2n-1} - (2n-1)_3 E_{2n-3} + \dots + (-1)^{n-1} 1]$$

—выраженіе Бернулліева числа чрезъ соотвѣтствующія Эйлеровы числа. Впрочемъ, соотношенія между тѣми и другими коэффициентами могутъ быть получены и иными способами.

Исходя изъ равенства:

$$\sec x = \frac{d}{dx} \lg \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)$$

можемъ получить независимое выраженіе Эйлерова числа при помощи π и безконечнаго ряда:

$$E_{2n} = -2 \cdot \frac{1 \cdot 2 \dots 2n}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}} \left[1 - \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{5^{2n+1}} - \frac{1}{7^{2n+1}} + \dots \right]$$

а разсмотрѣніе тождества:

$$\frac{1}{e^x + e^{-x}} = \int_0^{\infty} \frac{\cos xz dz}{e^{\frac{\pi}{2}z} + e^{-\frac{\pi}{2}z}}$$

даетъ выраженіе Эйлерова числа чрезъ опредѣленный интегралъ

$$E_{2n} = 2 \int_0^{\infty} \frac{z^{2n} dz}{e^{\frac{\pi}{2}z} + e^{-\frac{\pi}{2}z}}$$

Далѣе, аналогично съ числами Я. Бернулли, числа Эйлера могутъ быть выражаемы чрезъ числа Моргана. Какъ показалъ Е. Lucas («Théorie des nombres»), тѣ же числа удовлетворяютъ, подобно Б. числамъ, нѣкоторымъ общимъ тождествамъ символическаго характера, такъ что съ успѣхомъ могутъ быть изучаемы при помощи метода символическаго обозначенія. Наконецъ, есть формула, предложенная Сезаго, которая Эйлерово число выражаетъ при помощи безконечнаго произведенія, аналогично формулѣ профессора Н. В. Бугаева.

Весьма замѣчательною особенностью Эйлеровыхъ чиселъ является то, что всѣ они—нечетныя и оканчиваются попеременно на 1 и на 5. Такъ:

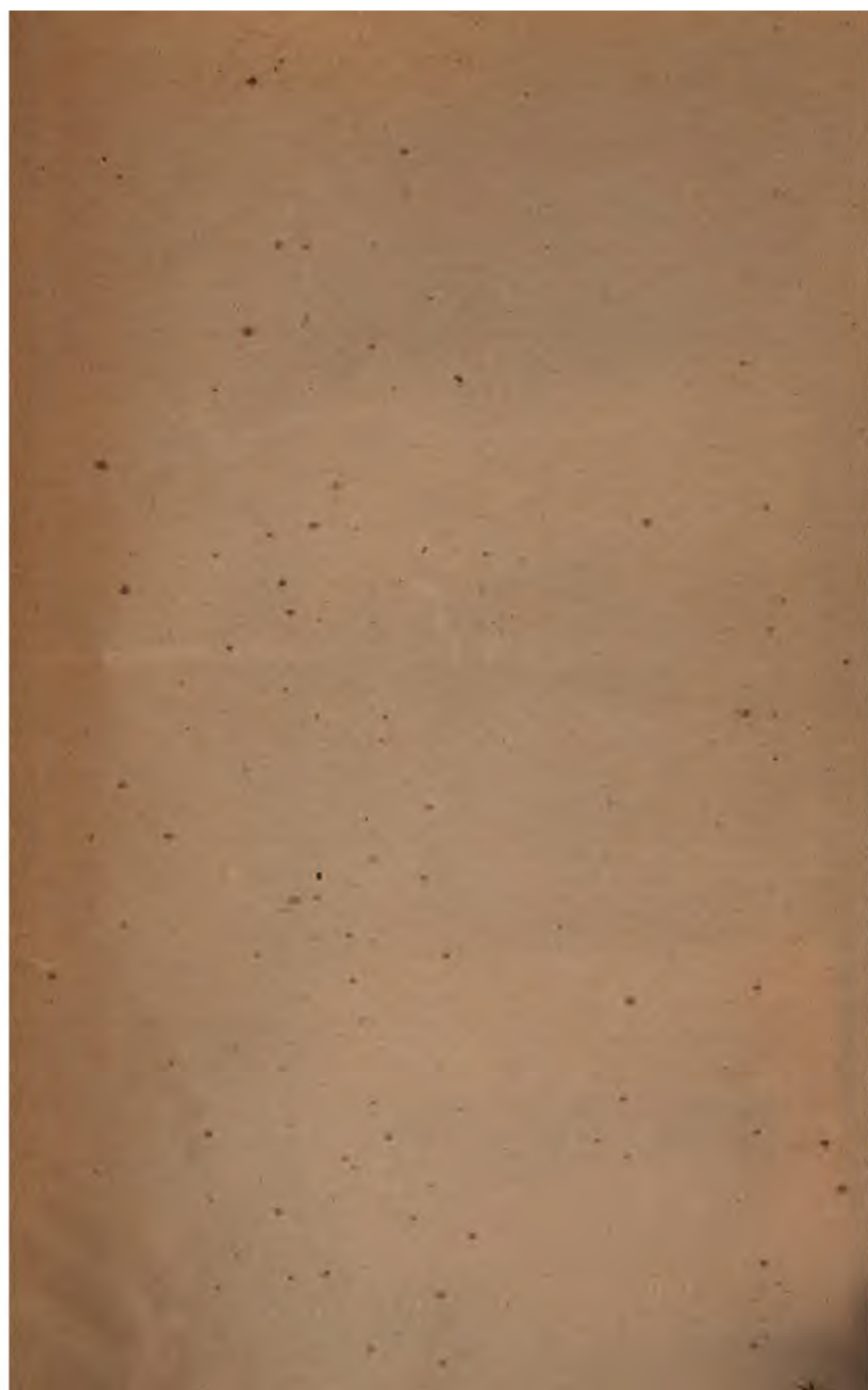
$E_2=1$, $E_4=5$, $E_6=61$, $E_8=1385$, $E_{10}=50521$ и т. д.

Подобно числам Я. Бернулли, они быстро возрастают и при достаточно большом указателѣ могут сдѣлаться болѣе всякой данной конечной величины.

Исслѣдованіе такихъ чиселъ, каковы числа Эйлера и Я. Бернулли, съ одной стороны обогащаетъ науку о числахъ знаніемъ свойствъ этихъ особенныхъ чиселъ, а съ другой—способствуетъ ея собственному развитію, содѣйствуя возникновенію въ ней новыхъ методовъ для изученія чиселъ и числовыхъ функцій.

$$\begin{aligned} \frac{m}{1} &= m \\ \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} &= \sum_{i=1}^{m-1} i \\ &= \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \sum_{i=1}^{m-2} \sum_{j=1}^{m-1-i} j \\ &= \sum_{i=1}^{m-2} \frac{m-1-i}{2} \end{aligned}$$

Далѣе, такъ какъ $E_n = \sum_{k=0}^{n-1} E_k$, то имѣемъ:
 $E_2 = 1$
 $E_4 = 5$
 $E_6 = 61$
 $E_8 = 1385$
 $E_{10} = 50521$
и т. д.





Bernullievychisla /

Stanford University Libraries



3 6105 043 166 631

From the books of
Joseph J. Smortchevskij
Vancouver, B.C., Canada, 1986

$$(m)_p^2 \frac{m!}{(m-p)! p!} \sum_{m-p-1}^m p+1$$

JUN

1991

STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD, CALIFORNIA 94305-6004

ЕПЛЕТНАЯ